

О КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

Предложенный в [1] критерий разрушения упругих тел, граница которых содержит угловую точку, имеет вид

$$N = N_c . \quad (1)$$

Здесь N – коэффициент при главном члене сингулярного разложения поля напряжений (локально симметричного в системе координат x, y , отнесенной к угловой точке),

$$\sigma_{yy} \sim \frac{N}{r^\lambda} : \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow 0 , \quad (2)$$

зависящий от геометрии области и условий нагружения; λ – показатель особенности, являющийся функцией угла выреза ψ .

Критерий (1) введен из соображений размерности по аналогии со случаем трещины-разреза. Однако степень его мотивированности в сравнении с последним далеко не одинакова, поскольку обоснование соотношения (1) в рамках энергетической теории или силового подхода затруднено. Другим недостатком критерия (1) является необходимость экспериментального определения постоянной разрушения N_c для всех значений угла ψ .

В целях физической трактовки соотношения (1) и постановки рационального эксперимента целесообразно дать истолкование критерия (1) с позиций линейной механики разрушения.

Основным предположением в последней является допущение о наличии в опасной точке области начальной трещины [1], малой в сравнении с характерным размером тела H . Распространение трещины служит причиной разрушения материала, причем ответственным за разрушение является коэффициент интенсивности K локального поля напряжений около конца трещины [1]. Критерий распространения трещины в линейной механике разрушения имеет вид

$$K = K_c . \quad (3)$$

Связь между величинами N, K может быть найдена из решения упругой задачи для исходной области с внесенным разрезом

$$F(N, K, H, 1) = 0, \quad (4)$$

поэтому критерий разрушения с учетом (3) принимает вид

$$F(N, K_c, H, 1) = 0. \quad (5)$$

Учитывая малость параметра $1/H$ (что характерно для начальных трещин в высокопрочных сталях и других конструкционных материалах), зависимость (4) установим с помощью метода внешних и внутренних разложений [2]. В качестве внешнего разложения следует принять асимптотику поля напряжений

на бесконечности в задаче о бесконечном теле с угловым вырезом и разрезом в его вершине. Внутренним является разложение поля напряжений для исходной задачи без разреза в окрестности угловой точки.

Таким образом, предлагаемый подход к определению условия разрушения тела сводит решение задачи к определению коэффициента N в рамках обычного упругого анализа для тела без трещины; критическое значение параметра N (или, что эквивалентно, внешних усилий) определится тогда из соотношения (5).

В качестве примера, иллюстрирующего предложенный подход, рассмотрим случай антиплоской деформации цилиндрического тела с осью x_3 и поперечным сечением, отнесенным к декартовым осям x, y . Компоненты тензора напряжений могут быть определены по формуле

$$\tau_x - i \tau_y = f'(z) = F(z),$$

где $F(z)$ – аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$. Отличной от нуля компонентой смещения будет смещение вдоль оси x_3

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z).$$

Главный вектор усилий R , действующий на произвольную дугу AB в области, занимаемой телом, определяется соотношением

$$R = \operatorname{Im} f(t), t \in AB. \tag{6}$$

Для асимптотического анализа поля напряжений в области, содержащей угловую точку с трещиной, рассмотрим однородную задачу для клина с разрезом в вершине (рис. 1).

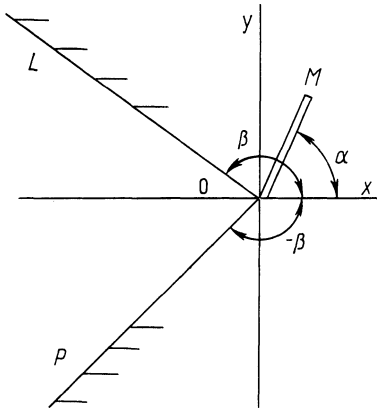


Рис. 1. Клин с разрезом в вершине.

Берега клина и разреза будем считать незагруженными, поэтому согласно (6) на ломаной LOMP имеем:

$$f(z) - \overline{f(z)} = 0.$$

Отобразим указанную область на верхнюю полуплоскость вспомогательной плоскости комплексного переменного ξ с помощью функции

$$z = \omega(\xi) = 1(-i)^\lambda (\xi - 1)^{m_1} \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \xi\right)^{m_2};$$

$$\left(\lambda = \frac{2\beta}{\pi}; m_1 = \frac{\beta + \alpha}{\pi}; m_2 = \frac{\beta - \alpha}{\pi}\right). \tag{7}$$

Краевое условие (6) преобразуется к виду

$$g(\xi) - \overline{g(\xi)} = 0 \quad (\operatorname{Im} \xi = 0), \tag{8}$$

где $g(\xi) = f(\omega(\xi))$ – аналитическая в верхней полуплоскости функция.

Решениями задачи (8) являются функции

$$f_{\kappa}(\xi) = C\xi^{\kappa}, \quad (\kappa = \pm 1, \pm 2, \dots; \operatorname{Im} C = 0). \quad (9)$$

Отрицательным значениям соответствуют решения с неограниченными смещениями в окрестности точки $\xi = 0$, являющейся образом вершины трещины М при отображении (9). Значения $\kappa \geq 2$ определяют решения, не влияющие на асимптотику в вершине угла, поэтому следует принять в (9) $\kappa = 1$.

Главный член разложения указанного решения при $z \rightarrow \infty$ согласно (7), (9) запишется

$$f(z) = C i \left(\frac{z}{1} \right)^{\lambda} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^s, \quad (10)$$

где $\lambda = \pi/2\beta$; $s = (\alpha - \beta)/2\beta$.

Аналогично разложение в окрестности точки М ($z \rightarrow 1e^{i\alpha}$) имеет вид

$$f(z) = C i (z - 1e^{i\alpha})^{1/2} \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{1\beta} \right)^{1/2} e^{-\frac{i\alpha}{2}} \quad (11)$$

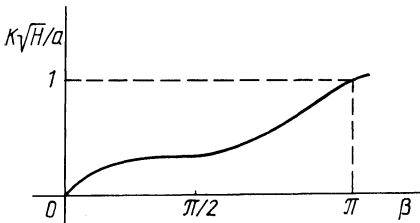


Рис. 2. Зависимость коэффициента интенсивности от угла.

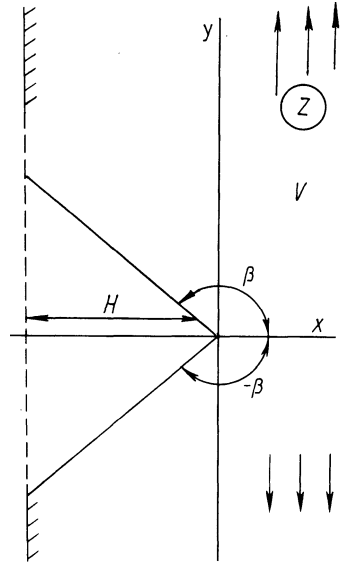


Рис. 3. Полу плоскость с угловым вырезом.

Коэффициенты интенсивности определяются формулами:

$$K = \lim [\sqrt{(z - 1e^{i\alpha})} (\tau_y + i\tau_x)]; z \rightarrow 1e^{i\alpha};$$

$$N = \lim [z^{-\lambda} (\tau_y + i\tau_x)]; z \rightarrow \infty.$$

Из соотношений (9) – (11) следует, что

$$K = \frac{1}{2} C \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{\beta 1} \right)^{1/2} e^{-\frac{i\alpha}{2}};$$

(12)

$$N = c\lambda 1^{-\lambda} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^s.$$

Анализ первого из выражений (12) показывает, что максимальное значение $|K|$ достигается при $\alpha = 0$, поэтому наиболее опасной является трещина, симметричная относительно берегов выреза. Полагая в (12) $\alpha = 0$, получим зависимость между K и N :

$$\frac{K}{N} = \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{1/2} 1^{\lambda - 1/2}. \quad (13)$$

Представляет интерес зависимость коэффициента интенсивности K от угла выреза. Из анализа размерностей при однопараметрическом нагружении тела сдвигowymi усилиями интенсивности p следует, что $N = apH^{1-\lambda}$ (a – безразмерная постоянная), поэтому из (13) находим

$$\frac{K\sqrt{H}}{a} = p \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{H} \right)^{\lambda - 1/2}. \quad (14)$$

График зависимости (14) от величины угла β представлен на рис. 2.

Согласно условию (2) и соотношению (13) критерий разрушения принимает вид

$$N = K_c \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{1/2} 1^{1/2 - \lambda} \quad (\lambda = \pi/2\beta), \quad (15)$$

где коэффициент N отыскивается из обычного упругого анализа задачи без трещины.

Таким образом, в сравнении с критерием (1) экспериментального определения требуются лишь параметр K_c и характерная для данного материала длина начальной трещины l , что существенно снижает объем эксперимента.

В качестве примера приложения критерия (15) рассмотрим задачу о полуплоскости с угловым вырезом V (рис. 3).

Граница тела свободна от усилий. На бесконечном удалении от выреза приложены сдвиговые усилия $\tau_y = \tau_\infty$, $\tau_x = 0$.

Конформное отображение верхней полуплоскости $\text{Im}\xi \geq 0$ переменного ξ на область V имеет вид

$$z = \omega(\xi) = -\frac{iR}{m} \int_0^{\xi} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)^{1/2} - \frac{\beta}{\pi} dt, \quad (16)$$

Здесь $m = \int_0^1 \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right)^{1/2} dt$; $R = -H \cos \beta$,

где H – глубина выреза.

В плоскости ξ получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} f(\xi) - \overline{f(\xi)} &= 0 \quad (\text{Im}\xi = 0; \quad -\infty < \text{Re}\xi < +\infty); \\ \text{Im} \left(\frac{f'(\xi)}{\omega'(\xi)} \right) &\rightarrow -\tau_\infty; \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Решением краевой задачи (17) служит функция

$$f(\xi) = \frac{\tau_{\infty} R}{m} \xi.$$

Коэффициент интенсивности напряжений в вершине угла определится теперь по формуле

$$N = \tau_{\infty} \left(\frac{2m\beta}{\pi R} \right)^{\lambda-1} \quad (\lambda = \pi/2\beta). \quad (18)$$

Критическое значение усилия τ_{∞} , отвечающее страгиванию трещины, теперь определится из (18) и (13) в виде

$$\tau_{\infty} = K_C l^{\frac{1}{2} - \lambda} R^{\lambda-1} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2m} \right)^{\lambda-1}. \quad (19)$$

В частном случае вырождения углового выреза в разрез длины H ($\beta = \pi$) критерий разрушения (19) принимает вид $\tau_{\infty} \sqrt{\frac{H}{2}} = K_C$, совпадающий с известным $\tau_{\infty} \sqrt{\frac{H+1}{2}} = K_C$ при условии малости параметра l/H .

Другой предельный случай соответствует переходу к полуплоскости с трещиной длины l ($\beta \rightarrow \pi/2$). Из (19) следует тогда соотношение $\frac{\tau_{\infty} \sqrt{l}}{\sqrt{2}} = K_C$, совпадающее с точным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.Н. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
2. Черепанов Г.Н., Ершов Л.В. Механика разрушения. — М.: Наука, 1974. — 224 с.

УДК 539.3

А.Е.КРУШЕВСКИЙ, канд. техн. наук,
В.Н.АПАНОВИЧ, канд.техн.наук (БПИ)

О СХОДИМОСТИ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ПРИ ТОЧЕЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

При решении задач теории упругости аналитическими вариационными методами скорость сходимости приближенных решений к точному в значительной степени определяется аппроксимативными свойствами применяемых координатных систем.

В настоящее время для улучшения качества аппроксимации решения краевой задачи применяются структуры, удовлетворяющие либо граничным условиям (ГУ), либо внутренним условиям равновесия [1].

В работе [2] показано, что использование полиномиальных координатных систем, точно удовлетворяющих условиям равновесия внутри тела, значительно улучшает сходимость приближенных решений и повышает устойчивость вычислительного процесса. В данной работе исследуется сходимость вариаци-