

При сложном нагружении (с учетом теплового воздействия) наблюдается общая тенденция к уменьшению концентрации напряжений, если конечным этапом было охлаждение. Цикл "нагрев—охлаждение" играет положительную роль, так как не только выравнивает неоднородность напряженного состояния, но и снижает в значительной степени деформации сжатия.

Учитывая напряженно-деформированное состояние стержней каркаса в зависимости от их длины, можно оптимизировать раскрой каркаса так, чтобы напряжения в стержнях были минимальны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Г.Ф., Буткевич Н.Н., Подгайский Ф.И. Исследования напряженного состояния жесткого треугольного стержневого элемента, подвергаемого механическому и температурному нагружениям. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1982, вып. 9, с. 47–52.
2. Буткевич Н.Н. Исследование напряженного состояния ковочных штампов с неоднородным термическим упрочнением. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Минск, 1972. — 25 с.
3. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризациино-оптические методы механики деформируемого тела. — М.: Наука, 1973. — 576 с.
4. Пригоровский Н.И. Экспериментальные методы определения температурных напряжений. — В кн.: Исследования температурных напряжений. М.: Наука, 1972, с. 3–9.

УДК 531.3 + 629.11.012.5

М.А.ЛЕВИН, В.П.БОЙКОВ, канд-ты техн. наук (БПИ)

### ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО КАЧЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА ПО ДЕФОРМИРУЕМОМУ ОСНОВАНИЮ

В работе рассматривается колесо с деформируемой периферией, катящееся по основанию, которое характеризуется инерционными свойствами, а также комбинацией упруговязких свойств и трением, близким по структуре к сухому. Учитываются продольные деформации периферии колеса и основания. Описан алгоритм расчета зависимости для продольной силы, приведенного к центру колеса момента реакции основания и момента сопротивления качению в функции параметров движения системы и, в частности, радиуса качения колеса, скорости и т.д. Приводится результат расчета на ЭВМ Минск-32 в соответствии с описанным алгоритмом.

Исследование качения жесткого колеса по деформируемому основанию с учетом вязкоупругих свойств и при отсутствии продольных деформаций было осуществлено А.Ю.Ишлинским [1]. Настоящее исследование опирается на результаты работы [1] и метод, развитый в [2, 3].

Предполагается, что деформируемая периферия колеса и основание представляются в виде набора стержней, а проскальзывание в области контакта отсутствует. Схема деформаций в области контакта показана на рис. 1. Направление отсчета составляющих реакции в области контакта  $P_1$ ,  $P_3$  и  $M_2$ , приведенных к центру  $C$  колеса, также указано на рис. 1 и соответствует работе [2]. Очевидно, что в стационарном качении силы и момент, действующие со стороны экипажа на колесо, равны  $\vec{P}_1^1 = -\vec{P}_1$ ;  $\vec{P}_3^1 = -\vec{P}_3$ ;  $\vec{M}_2^1 = -\vec{M}_2$  (заметим, что

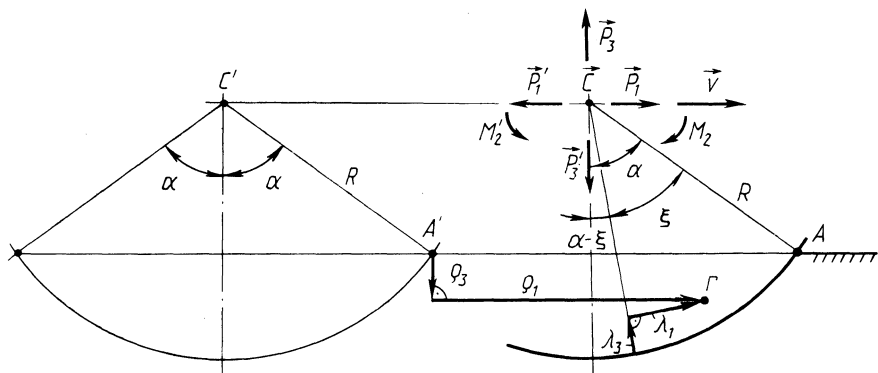


Рис. 1. Схема деформаций и усилий колеса и основания.

в обозначениях работы [4], например, в ведущем режиме, имеют место соотношения  $P_1' = X$ ;  $M_2' = -M_K$ ). При рассмотрении качения по абсолютно твердому основанию выбор центра приведения моментной составляющей реакции в области контакта может быть сделан по-разному. В случае же деформируемого основания приведение сил реакции к центру  $C$  колеса наиболее удобно, так как выбор центра приведения, например, в центре области контакта вызывал бы существенные трудности в связи с зависимостью поверхности контакта от различных силовых и кинематических факторов. Обозначим также радиус колеса в недеформированном состоянии  $R$ , а угол контакта  $2\alpha$ .

Рассмотрим деформации в области контакта. В некоторый момент времени, когда центр колеса занимает в пространстве положение  $C'$ , точка  $A'$  деформируемой периферии колеса на передней границе области контакта вступает в соприкосновение с деформируемым основанием. За определенный промежуток времени центр колеса перейдет из положения  $C'$  в положение  $C$ . За это же время диск колеса повернется на угол  $\xi$  и радиус  $C'A'$  займет положение  $CA$ . Принимая скорость центра колеса равной  $v$  и радиус качения равным  $r_K$  ( $r_K$  — расстояние от центра  $C$  до мгновенного центра скоростей диска колеса), находим, что  $C'S = r_K \xi$ . Обозначим деформацию колеса в направлении радиуса  $\lambda_3$ , а в направлении касательной —  $\lambda_1$  и соответствующие жесткости на единицу длины области контакта соответственно  $c_3$  и  $c_1$ . Аналогичные деформации основания обозначаются: в направлении нормали —  $\rho_3$  и в направлении плоскости основания —  $\rho_1$ , а соответствующие жесткости на единицу длины области контакта —  $c_{3g}$  и  $c_{1g}$ .

Элемент деформируемой периферии колеса длиной  $Rd\xi$  контактирует с элементом основания длиной  $r_K d\xi$ . Действительно, если диск колеса повернулся на угол  $d\xi$ , то новая точка  $A$  совпадает с концом стержня, вступившим в контакт с основанием в точке, удаленной от прежней  $A$  на расстояние  $r_K d\xi$ . Это значит, что периферия колеса и основание имеют в продольном направлении относительные деформации (растяжение или сжатие) противоположного знака, связанные с продольным псевдоскольжением  $\epsilon_1$ , определяемым по формуле  $\epsilon_1 = r_K/r - 1$ , где  $r$  — радиус качения в свободном режиме, когда  $P_1 = 0$ . Заметим, что обычно полное скольжение в области контакта наступает

при значениях  $r_K$  порядка  $(1 \pm 0,2)r$ , причем, как известно,  $r$  и  $R$  близки. Поэтому в работе рассматривается качение при условии, что  $r_K$  и  $r$  не сильно отличаются.

Введем силы инерции основания в вертикальном направлении, учитывая эффективную массу основания  $m$ , которая приходится на единицу длины области контакта. Таким образом,  $m$  – масса основания, приведенная к концу стержня, имитирующего жесткость основания. Линейное вязкое сопротивление основания, приходящееся на единицу длины области контакта, примем в виде  $\mu \dot{\rho}_3$ , а нелинейное – по формуле  $\frac{2}{\pi} \nu \arcsin \operatorname{tg}(\alpha_v \dot{\rho}_3)$ , приближенно представляющей сухое трение  $\nu \operatorname{sign}(\dot{\rho}_3)$ . При этом, конечно,  $\alpha_v$  принимается достаточно большим, чтобы сухое трение имитировалось достаточно точно при весьма малых значениях скорости ( $\dot{\rho}_3 \neq 0$ ). Ясно, что при  $\dot{\rho}_3 = 0$  результат получается иным из-за возможных зон застоя. Поэтому решение задачи строго соответствует нелинейному сопротивлению по формуле  $\frac{2}{\pi} \nu \arcsin \operatorname{tg}(\alpha_v \dot{\rho}_3)$ . Силы вязкого сопротивления, зависящие от  $\dot{\lambda}_3$ , и силы инерции периферии колеса и в продольном направлении основания опускаем в связи со значительно большей податливостью  $1/c_{3g}$  рассматриваемого здесь основания. Впрочем, если  $\mu$ ,  $\nu$  и  $m$  рассматривать как некоторые приведенные величины, то они учитывают и соответствующие параметры колеса. В случае, когда колесо представляется в виде цилиндра, при ширине области контакта, равной  $2b$ , получаем:

$$c_1 = c_1' 2b, \quad c_3 = 2bc_3', \quad c_{1g} = 2bc_{1g}', \quad c_{3g} = 2bc_{3g}',$$

$$\mu = 2b\mu', \quad \nu = 2b\nu', \quad m = 2bm'.$$

Здесь штрихами обозначены аналогичные параметры, но относящиеся к единице площади области контакта.

Из совместности деформаций в точке  $\Gamma$  контакта (рис. 1) получаем:

$$r_K \xi + (R - \lambda_3) \sin(\alpha - \xi) + \lambda_1 \cos(\alpha - \xi) = R \sin \alpha + \rho_1; \quad (1)$$

$$(R - \lambda_3) \cos(\alpha - \xi) - \lambda_1 \sin(\alpha - \xi) = R \cos \alpha + \rho_3. \quad (2)$$

По третьему закону Ньютона из равенства по модулю распределенных усилий взаимодействия между колесом и основанием в нормальном и продольном направлениях к последнему находим:

$$c_3 \lambda_3 \cos(\alpha - \xi) + c_1 \lambda_1 \sin(\alpha - \xi) =$$

$$= \frac{r_K}{R} (c_{3g} \rho_3 + \mu \dot{\rho}_3 + \frac{2\nu}{\pi} \arcsin \operatorname{tg}(\alpha_v \dot{\rho}_3) + m \ddot{\rho}_3); \quad (3)$$

$$-c_3 \lambda_3 \sin(\alpha - \xi) + c_1 \lambda_1 \cos(\alpha - \xi) = -c_{1g} \rho_1 \frac{r_K}{R}. \quad (4)$$

Из уравнения (4) можно выразить  $\rho_1$  и подставить в (1). В результате получим вместе с уравнением (2) два уравнения, позволяющие выразить  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$  через  $\rho_3$  по формулам

$$\lambda_1 = (\Delta_1 \Delta_{23} - \Delta_2 \Delta_{13}) / \Delta, \quad \lambda_3 = (\Delta_2 \Delta_{11} - \Delta_1 \Delta_{21}) / \Delta, \quad (5)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta &= \Delta_{11}\Delta_{23} - \Delta_{21}\Delta_{13}; \\
 \Delta_{11} &= -\left(1 + \frac{c_1 R}{c_1 g r_K}\right) \cos(\alpha - \xi); \\
 \Delta_{13} &= \left(1 + \frac{c_3 R}{c_1 g r_K}\right) \sin(\alpha - \xi); \\
 \Delta_{21} &= -\sin(\alpha - \xi), \quad \Delta_{23} = -\cos(\alpha - \xi); \\
 \Delta_1 &= r_K \dot{\xi} + R [\sin(\alpha - \xi) - \sin \alpha]; \\
 \Delta_2 &= \rho_3 + R [\cos \alpha - \cos(\alpha - \xi)].
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Так как процесс качения стационарный, то справедливо преобразование дифференциальных операторов  $\frac{d}{dt} = \frac{v}{r_K} \frac{d}{d\xi}$ ,  $\frac{d^2}{dt^2} = \frac{v^2}{r_K^2} \frac{d^2}{d\xi^2}$ . С использованием последних уравнение (3) преобразуется к двум уравнениям первого порядка:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\xi} \rho_3 \dot{\xi} &= \frac{r_K^2}{v^2} \left\{ \frac{R}{r_K} [c_3 \lambda_3 \cos(\alpha - \xi) + c_1 \lambda_1 \sin(\alpha - \xi)] - \right. \\
 &\left. - c_3 g \rho_3 - \mu \frac{v}{r_K} \rho_3 \dot{\xi} - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{\alpha v \rho_3 \dot{\xi}}{r_K} \right) \right\}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\xi} \rho_3 = \rho_3 \dot{\xi}. \quad (8)$$

Из схемы на рис. 1 для составляющих реакции в области контакта  $P_1, P_3, M_2$ , приведенных к центру колеса  $C$ , получаем:

$$\frac{d}{d\xi} P_3 = R [c_3 \lambda_3 \cos(\alpha - \xi) + c_1 \lambda_1 \sin(\alpha - \xi)]; \quad (9)$$

$$\frac{d}{d\xi} P_1 = R [-c_3 \lambda_3 \sin(\alpha - \xi) + c_1 \lambda_1 \cos(\alpha - \xi)]; \quad (10)$$

$$\frac{d}{d\xi} M_2 = -c_1 \lambda_1 (R - \lambda_3) R - c_3 \lambda_3 \lambda_1 R. \quad (11)$$

Система уравнений (5) – (11) интегрируется при начальных нулевых условиях в пределах  $0 \leq \xi \leq \xi_K$ , где  $\xi_K$  – значение угловой координаты в области контакта, при которой  $\lambda_3 = 0$ . При этом предполагается, что в области  $\xi_K < \xi \leq 2\alpha$  контакт отсутствует.

Момент сопротивления качению, как известно, определяется по формуле

$$M_f = N_f / \dot{\xi} = -(P_1 r_K + M_2),$$

где  $N_f$  – мощность диссипативных сил, равная мощности сил, которые дейст-

вуют на колесо со стороны экипажа в стационарном движении, и принимающая значение  $N_f = -(P_1 v + M_2 v / r_K)$  при  $\xi = v / r_K$ .

Нетрудно заметить, что в случае сухого трения в элементах основания (тогда вместо  $\frac{2\nu}{\pi} \arctg(\alpha_v \nu \rho_{3\xi} / r_K)$  используется выражение  $\nu \text{sign}(\rho_{3\xi})$ ), ес-

ли  $\rho_{3\xi} \neq 0$  и принимается во внимание возможность застоя при  $\rho_{3\xi} = 0$ ) система уравнений (5) – (11) имеет решение в квадратурах по типу решения задачи о колебаниях материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, и сухого трения с добавлением возмущающей силы. Решение сопровождается совокупностью проверок на возможность наступления состояния  $\rho_{3\xi} \neq 0$ , если  $\rho_3 = \text{const}$ , и проверкой возможности наступления состояния  $\rho_3 = \text{const}$ , если было состояние  $\rho_{3\xi} \neq 0$ , которое закончилось признаком  $\rho_{3\xi} = 0$ . Причем в процессе вычислений устанавливаются интервалы интегрирования, на которых система уравнений имеет соответствующий вид. Если имеет место состояние  $\rho_{3\xi} = 0$ , то уравнения (7), (8) заменяются на  $\rho_3 = \text{const}$  и должно выполняться условие

$$| \frac{R}{r_K} [c_3 \lambda_3 \cos(\alpha - \xi) + c_1 \lambda_1 \sin(\alpha - \xi)] - c_3 \rho_3 | < \nu . \quad (12)$$

Если это неравенство превращается в равенство, то возможно  $\rho_{3\xi} \neq 0$ , и система уравнений имеет вид (7), (8). Если в состоянии  $\rho_{3\xi} = 0$  при некотором  $\xi$  значение  $\rho_3$  снизилось до нуля, то  $\rho_3 = \text{const}$  будет иметь место только тогда, когда выполняется условие (12). Таким образом, с учетом сухого трения решение оказывается громоздким и все равно осуществляется с помощью ЭВМ (см., например [5]). Поэтому рациональным является непосредственное численное решение системы (5) – (11) на ЭВМ, например, методом Рунге–Кутты.

Поскольку зависимость  $\frac{2\nu}{\pi} \arctg(\alpha_v \nu \rho_{3\xi} / r_K)$  приближенно имитирует сухое трение, то если нужно найти силы, действующие на колесо при малых скоростях движения  $v$ , необходимо подставлять эти скорости, а не  $v = 0$ . Последнее свидетельствовало бы об отсутствии качения. При этом, конечно, как было указано,  $\alpha_v$  должно быть достаточно большим.

В качестве примера приведем результаты расчета с использованием Фортран-программы для ЭВМ Минск-32, составленной и отлаженной авторами. При следующих данных:  $R = 0,485$  м,  $2\alpha = 0,64$  рад,  $c_1 = 2100$  кН/м<sup>2</sup>,  $c_3 = 1050$  кН/м<sup>2</sup>,  $c_{1g} = 700$  кН/м<sup>2</sup>,  $c_{3g} = 350$  кН/м<sup>2</sup>,  $m = 100$  кг/м,  $\mu = 1050$  кН·с/м<sup>2</sup>,  $\nu = 3,5$  кН/м,  $\alpha_v = 100$ ,  $r_K = 0,470$  м,  $v = 5$  м/с получены значения  $r = 0,477$  м,  $P_1 = 0,345$  кН,  $P = 5,24$  кН,  $M_2 = -0,173$  кН·м,  $M = 0,011$  кН·м. Величина  $M_f$  оказалась низкой в связи с существенным влиянием большой погонной массы основания  $m$  и значительной величиной коэффициента вязкого сопротивления  $\mu$ . Наблюдаемое снижение  $M_f$  при больших  $m$ ,  $\mu$  и указанной скорости  $v$  объясняется тем, что в этом случае основание не успевает значительно деформироваться в области контакта и ведет себя почти как жесткое. И действительно, при  $m = 10$  кг/м,  $\mu = 35$  кН·с/м<sup>2</sup> и неизменных остальных параметрах, указанных выше, вычисления дают  $r = 0,478$  м,  $P_1 = 0,293$  кН,  $P_3 = 3,30$  кН,  $M = -0,226$  кН·м,  $M_f = 0,089$  кН·м.

Дальнейшее развитие приведенных результатов должно идти в направлении учета также и боковой силы. При этом имеет смысл принимать во внима-

ние и другие дополнительные параметры деформируемой периферии колеса и основания, а также и зоны скольжения в области контакта, как это было сделано, например в работе [6], для колеса, катящегося по жесткому основанию при определении безразмерных составляющих  $Q_{10}$  и  $Q_{20}$ , продольной и боковой силы. Что касается зависимостей для  $Q_{10}$  и  $Q_{20}$  в [6] и в обозначениях работы [6], то они оказываются симметричными соответственно относительно  $\epsilon_{20}$ ,  $\epsilon_{10}$ , если представить  $V_{\Gamma g}$  в форме  $V_{\Gamma y} = r \dot{\varphi} \epsilon_2 - \dot{\lambda}_2$ . При этом возможно следующее приближенное представление результатов, полученных в [6] на ЭВМ:

$$\begin{aligned} Q_{10}(\epsilon_{10}, \epsilon_{20}) &= Q_{10}(\rho_0, 0)F_{12}(\varphi_0, \rho_0), \quad F_{12} = \cos \mu_0; \\ Q_{20}(\epsilon_{10}, \epsilon_{20}) &= Q_{20}(0, \rho_0)F_{21}(\varphi_0, \rho_0), \quad F_{21} = \sin \mu_0; \\ \varphi_0 &= \arctg(\epsilon_{20}/\epsilon_{10}), \quad \rho_0 = (\epsilon_{10}^2 + \epsilon_{20}^2)^{1/2}; \\ \mu_0 &= \varphi_0 - [A_0 - 4B_0\rho_0(\rho_0 - 1)] \sin 2\varphi_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Причем для рассмотренной в [6] конкретной простейшей модели периферии колеса

$$Q_{10}(\rho_0, 0) = Q_{20}(0, \rho_0) = 1 - (1 - \rho_0)^3.$$

Вычисления показывают, что  $A_0 = B_0 = 0$  в случае  $\chi = 1$ , а в случае  $\chi = 3$  получаем  $A_0 = 0,306$  и  $B_0 = 0,15$ . Отметим, что коэффициенты  $A_0$  и  $B_0$  в общем случае определяются по методу наименьших квадратов при сравнении зависимостей (13) и аналогичных зависимостей, полученных с помощью ЭВМ или эксперимента. Может быть также использована и более простая процедура, в соответствии с которой сначала находится  $A_0$  при  $\rho_0 = 1$ , а затем определяется  $B_0$  из совпадения с зависимостями (13) в одной точке. Например,  $\epsilon_{10} = \epsilon_{20} = 0,35$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю. Трение качения. — Прикладная математика и механика, 1938, т. II, вып. 2, с. 245–260.
2. Левин М.А. Теория движения деформируемого колеса, приводящая к разностным уравнениям, при отсутствии увода. — В кн.: Мат-лы секции теоретической и прикладной механики; 26-ая конф. БПИ. Минск, 1970, с. 86–88.
3. Левин М.А. Понижение порядка зависимостей для реакций связей катящегося деформируемого колеса. — Докл. АН БССР, 1974, т. 18, № 6, с. 516–519.
4. Петрушов В.А., Шуклин С.А., Московкин В.В. Сопrotивление качению автомобилей и автопоездов. — М.: Машиностроение, 1975, с. 12.
5. Левин М.А., Солонский А.С., Мататова А.П. Приложение теории качения деформируемого колеса к исследованию динамики разгона трактора. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1976, вып. 3, с. 146–156.
6. Левин М.А. Исследование качения с проскальзыванием в области контакта с учетом анизотропии трения. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1983, вып. 10, с. 89–96.