Рассмотрим пример физической интерпретации особого решения. Пусть область, занятая упругим телом, представляет собой всю плоскость, разрезанную вдоль отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ на оси x. На бесконечности действует всестороннее растягивающее напряжение P. Края разреза считаем свободными от напряжений. В классе функций, ограниченных в концах отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, решение (5) запишется следующим образом:

$$\varphi_1(z) = \frac{P}{2}\sqrt{(z-a)(z-b)}\,;\quad \psi_1(z) = -\varphi_1(z)\,, \tag{6}$$

где $\varphi_1(t) = \varphi(t)$, $\psi_1(t) = -t\varphi'(t) + \psi(t)$.

Пусть после продвижения трещина занимает отрезок действительной оси $a \leqslant x \leqslant b + \Delta l$. Для нового положения трещины решение может быть получено из (6) заменой b на $b + \Delta l$. Скачок смещений при переходе от одного состояния к другому определится формулой

$$i\,\Delta v = \frac{\chi + 1}{2\mu} = \frac{P}{2}\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}\,\Delta l + 0(\Delta l)\,,$$

откуда $|z - b| > \Delta l$.

Однородное особое решение (m – постоянная)

$$\varphi_0(z) = m\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$$

может быть использовано для определения коэффициента интенсивности по изложенной в данной работе методике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р о м а н ч а к В.М. О некоторых соотношениях математической теории упругости для контура с угловыми точками. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика.Минск: Выш. шк., 1982, вып. 9, с. 58–62. 2. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1977. – 312 с. 3. П а н а с ю к В.В., С а в р у к М.П., Д а ц ы ш и н А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наукова думка, 1976. – 444 с.

УДК 539.3

Е.А.СВИРСКИЙ (БГУ)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПО ТОЛЩИНЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

На основе анализа напряженно-деформированного состояния пластинки выведена приближенная формула для сближения ее ограничивающих плоскостей под действием нормальной нагрузки, которая в рамках теории Кирхгофа-Лява является точной для постоянной и приближенной для непрерывно изменяющейся нагрузки.

Рассмотрим изгиб круглой пластинки, на ограничивающих плоскостях которой выполняются условия:

$$\begin{aligned} &\sigma_z = -p, \qquad z = h; \\ &\sigma_z = -q, \qquad z = -h; \\ &\tau_{rz} = 0 \qquad z = \pm h. \end{aligned} \tag{1}$$

Возьмем функцию напряжений в виде [1]

$$\begin{aligned} \varphi = &\frac{1}{3}A(16z^6 - 120z^4r^2 + 90z^2r^4 - 5r^6) + \\ &+ B(8z^6 - 16z^4r^2 - 21z^2r^4 + 3r^6) + \\ &+ C(8z^4 - 24r^2z^2 + 3r^4) + D(r^2z + z^3). \end{aligned} \tag{2}$$

Компоненты тензора напряжений σ_z, τ_{rz} определим из соотношений [1]

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}[(2-\nu)\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}]; \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial z}[(1-\nu)\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}] \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь символ Δ обозначает оператор Лапласа:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Подставляя (2) в (3), получим

$$\begin{aligned} \sigma_z = &A(-640z^3 + 960r^2z) + B\{[-960 + 32\cdot 22(2-\nu)]z^3 + \\ &+ [384 - 48\cdot 22(2-\nu)]r^2z\} - 192Cz + (14 - 10\nu)D; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = &A(960rz^2 - 240r^3) + B[(-672 + 48\cdot 22\nu)z^2r + \\ &+ (432 - 12\cdot 22\nu)r^3] + 96Cr. \end{aligned} \tag{5}$$

Удовлетворяя (4) и (5) граничным условиям (1), для определения неизвестных постоянных A, B, C, D получим систему четырех линейных алгебраических уравнений, разрешая которую имеем:

$$A = -\frac{18 - 11\nu}{110\cdot 256h^3}(p-q); \quad B = -\frac{1}{11\cdot 256h^3}(p-q);$$

$$C = \frac{1}{256h}(p-q); \qquad D = -\frac{1}{2(14-10\nu)}(p+q).$$

Тогда выражения (4), (5) принимают вид

$$\sigma_z = \frac{p-q}{4}\frac{z^3}{h^3} - \frac{3(p-q)}{4}\frac{z}{h} - \frac{p+q}{2};$$

$$\tau_{rz} = \frac{3}{8}\frac{r}{h}(1 - \frac{z^2}{h^2})(p-q)$$

На основании гипотезы Кирхгофа-Лява о нерастяжимости срединной плоскости пластинки предположим, что горизонтальные перемещения отсутствуют. Тогда деформации пластинки по высоте можно выразить зависимостью

$$\varepsilon_z = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \sigma_z .$$

Суммарное сокращение высоты пластинки (смятие) под действием внешних нормальных нагрузок p и q определим следующим образом:

$$w_{см} = \left| \int_{-h}^{h} \varepsilon_z dz \right| = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)h}{E(1-\nu)} (p+q). \qquad (6)$$

Формула (6) позволяет уточнить теорию изгиба круглых пластин на сплошном основании по схеме [2]

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975, с. 383–390. 2. Мартыненко М.Д., Свирский Е.А. Изгиб балки на нелинейной полуплоскости с учетом смятия ее по толщине. – Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат.навук, 1982, № 4, с. 33–38.

УДК 624.074

Г.Ф.ЕРШОВ, д-р техн.наук (БПИ),
Э.Г.КОСЫХ, канд.техн.наук (ГПИ)

К ВОПРОСУ О ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ОБОЛОЧЕК, ОСЛАБЛЕННЫХ ОТВЕРСТИЯМИ

Пусть для оболочки без отверстий при заданных граничных условиях перемещения точек срединной поверхности определены вектор-функцией Грина с компонентами $U_i(\alpha_1;\alpha_2;\beta_1;\beta_2$, т.е.

$$u_1(\alpha_1;\alpha_2) = U_i(\alpha_1;\alpha_2;\beta_1;\beta_2).$$

Здесь α_i – текущие координаты точки поверхности; β_i – координаты точки приложения единичной силы. Тогда, оставаясь в рамках гипотезы прямой нормали и линейной теории оболочек, для угла поворота нормали вдоль заданного направления l получим выражение

$$v_l = v_1 \cos(\widehat{l,\alpha_1}) + v_2 \cos(\widehat{l,\alpha_2}) .$$

Здесь

$$v_i = \frac{1}{A_i} \cdot \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_i} + \frac{U_i}{R_i} ,$$

где A_i, R_i – постоянная Ламе и радиус кривизны, соответствующие i-й коор-