Непосредственно под штампом (рис. 3, а, б) возникает небольшая зона значительных растягивающих напряжений σ_x. В остальной преобладающей зоне наблюдаются небольшие сжимающие напряжения. Это объясняется тем, что в направлении оси x не действуют внешние силы, поэтому главный вектор напряжений должен быть равен нулю.

Условие равенства нулю главного вектора напряжений выполняется и в области контакта параллелепипеда с абсолютно твердым гладким телом (рис. 4, а, б).

На линиях $x = 0$ и $z = \frac{h}{2}$ (аналогично на линии $x = \frac{a}{4}$ и $z = \frac{h}{2}$) растягивающие напряжения σ_y становятся сжимающими в области контакта с абсолютно твердым телом (рис, 5, а).

На свободной грани $x = \frac{a}{2}$ наблюдается неоднократная смена знака напряжений σ_y (рис. 5, б).

Числовой расчет выполнен на ЭВМ при $a = 0{,}2$ м; $b = 0{,}4$ м; $h = 0{,}6$ м; $h_0 = 10^{-5}$ м. Суммы представлены 50 слагаемыми.

Изображенные на рис. 1 точки расположены на наружных поверхностях. Точка 1 находится в начале координат. Номера точек нарастают последовательно сначала по оси z, потом по оси y и x с шагом, равным четверти длины соответствующей стороны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко Н.Я. Сжатие упругого параллелепипеда при действии на него полного и усеченного жесткого клинообразного штампа. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1978, вып. 6, с. 18–28.

УДК 517.946

Д.П.ЮЩЕНКО (ГГУ)

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ СО ЩЕЛЯМИ

В работе изучается первая краевая задача для однородных уравнений статики моментной теории упругости (уравнений м.т.у.) [1, с. 49] в многосвязной области со щелями. Автор предполагает, что читатель имеет возможность ознакомиться с монографией [1], поэтому будут использоваться обозначения и результаты из [1] с необходимыми ссылками.

Пусть E_3 – трехмерное евклидово пространство, а $D \in E_3$ – область с границей $S = \bigcup_{k=0}^{m} S_k$ и $\sigma = \bigcup_{j=1}^{n} \sigma_j$, причем S_k и σ_j являются соответственно замкнутыми и незамкнутыми поверхностями класса $Л_1(\alpha)$. Поверхность σ_j имеет простой замкнутый край γ_j. Будем предполагать, что только S_0 охватывает все остальные поверхности и, кроме того, две различные поверхности не имеют общих точек и не охватывают друг друга. За положительную нормаль к S примем внешнюю по отношению к области D, а на σ – любую фиксированную. Обозначим через σ_j^+ и σ_j^- стороны поверхности σ_j, соответствующие приближению точки к поверхности σ_j по направлению положительной и отрицательной нормалей. Пусть D_K – внешность поверхности $S_K (K = \overline{1, m})$, а $Q_j (j = \overline{1, n})$ являются пространствами с разрезом σ_j. D_0 обозначает внутренность поверхности S_0.

Функцию $U(x)$ будем называть регулярной в области D, если она имеет непрерывные вторые производные в этой области и непрерывно продолжима вместе с первыми производными в каждой точке поверхностей S σ_j^+ и σ_j^-, кроме того, при приближении к краю γ_j поверхности σ_j функция $U(x)$ ограничена, а ее первые производные в окрестности линий γ_j ведут себя как $0(R_j^{-\alpha})$, где $0 \leqslant \alpha < 1$, а R_j – расстояние до γ_j.

Рассмотрим задачу нахождения регулярного решения $U(x)$ уравнений м.т.у. в области D, удовлетворяющего краевому условию

$$U(y)/_{S_K} = f_K(y),\ U(y)/_{\sigma_j^\pm} = f_j^\pm(y), (K = \overline{0, m}; j = \overline{1, n}),$$

где $f_K(y)$; $f_j^+(y)$; $f_j^-(y)$ принадлежат классу $C^{0,\beta}$ и имеет место равенство $f_j^+(y) = f_j^-(y)$ для $y \in \gamma_j$.

Единственность решения поставленной задачи непосредственно следует из формулы Грина для области D.

Лемма. Всякое регулярное решение уравнений м.т.у. в области D представимо единственным образом в виде суммы решений уравнений м.т.у. в односвязных областях $D_K (K = \overline{0, m})$, $Q_j (j = \overline{1, n})$, причем в неограниченных областях они регулярны на бесконечности [1, с. 109].

Требуемое разложение непосредственно следует из интегрального представления решений уравнений м.т.у. в области D:

$$U(x) = \sum_{K=0}^{m} V_K(x) + \sum_{j=1}^{n} W_j(x),$$

где

$$V_K(x) = \frac{1}{2} \int_{S_K} \left\{ \psi(x-y) T_y U(y) - [T_y \psi(y-x)]' U(y) \right\} d_y S;$$

$$W_j(x) = \frac{1}{2} \int_{\sigma_j} \left\{ \psi(x-y) T_y U(y) - [T_y \psi(y-x)]' U(y) \right\} d_y \sigma';$$

$$\int_{\sigma_j} f(y) d\sigma = \int_{\sigma_j^+} f(y) d\sigma + \int_{\sigma_j^+} f(y) d\sigma.$$

Оператор моментного напряжения $T_y = T(\partial_y, n)$ (n – положительная нормаль) определен в [1, с. 52]; $\psi(x-y)$ – матрица фундаментальных решений уравнений м.т.у. [1, с. 73].

Векторы $V_K(x)$ и $W_j(x)$ являются решениями уравнений м.т.у. соответственно в областях D_K и Q_j.

Единственность требуемого представления покажем методом от противного. Решение $U(x)$ может быть представлено

$$U(x) = \sum_{\kappa=0}^{m} V_{\kappa}^{(1)}(x) + \sum_{j=1}^{n} W_j^{(1)}(x) = \sum_{\kappa=0}^{m} V_{\kappa}^{(2)}(x) + \sum_{j=1}^{n} W_j^{(2)}(x).$$

Для области D имеет место равенство

$$\sum_{\kappa=0}^{m} \overline{V}_{\kappa}(x) + \sum_{j=1}^{n} \overline{W}_j(x) = 0, \tag{1}$$

где $\overline{V}_{\kappa}(x) = V_{\kappa}^{(1)}(x) - V_{\kappa}^{(2)}(x),\ \overline{W}_j(x) = W_j^{(1)}(x) - W_j^{(2)}(x).$

Из формулы (1) следует, что

$$\overline{V}_0(x) = -\sum_{\kappa=1}^{m} \overline{V}_{\kappa}(x) - \sum_{j=1}^{n} \overline{W}_j(x).$$

Поскольку $\overline{V}_{\kappa}(x)$ и $\overline{W}_j(x)$ являются решениями и вне области D_0, то из последней формулы вытекает, что $\overline{V}_0(x)$ является решением во всем пространстве E_3. Но всякое решение уравнений м.т.у. во всем пространстве E_3, удовлетворяющее условию регулярности на бесконечности, является тождественным нулю, поэтому $\overline{V}_0(x) \equiv 0$ и $V_0^{(1)}(x) \equiv V_0^{(2)}(x)$.

Аналогично доказывается, что $\overline{V}_{\kappa}(x) \equiv 0$ и $\overline{W}_j(x) \equiv 0$ $(\kappa = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$.

Перейдем к решению исходной задачи. Предварительно отметим, что существуют матрицы Грина первой основной задачи для областей D_{κ} и Q_j, которые обозначим соответственно через $G(x, y)$ и $G^*(x, y)$.

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$U(x) = \sum_{\kappa=0}^{m} \int_{S_{\kappa}} T_y G_{\kappa}(x,y)\nu_{\kappa}(y)\, d_y S + \sum_{j=1}^{n} \int_{\sigma_j} T_y G_j^*(x,y)\mu_j(y)\, d_y\sigma,$$

где $\nu_{\kappa}(y)$ и $\mu_j(y)$ – неизвестные плотности класса $C^{0,\beta}$, для определения которых получаем систему регулярных интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\nu_p(z) + \sum_{\substack{\kappa=0\\ \kappa\neq p}}^{m} \int_{S_{\kappa}} T_y G_{\kappa}(z, y)\nu_{\kappa}(y)\, d_y S + \sum_{j=1}^{n} \int_{\sigma_j} T_y G_j^*(z, y)\, \mu_j(y)\, d_y\sigma = \\
&= f_p(z); \quad (p = \overline{0, m};\ z\in D_p);\\
&\mu_l^+(z) + \sum_{\kappa=0}^{m} \int_{S_{\kappa}} T_y G_{\kappa}(z,y)\nu_{\kappa}(y)\, d_y S + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} \int_{\sigma_j} T_y G_j^*(z,y)\mu_j(y)\, d_y\sigma = \\
&= f_l^+(z); \quad (l = \overline{1, n};\ z\in \sigma_l^+);\\
&\mu_l^-(z) + \sum_{\kappa=0}^{m} \int_{S_{\kappa}} T_y G_{\kappa}(z, y)\nu_{\kappa}(y)\, d_y S + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} \int_{\sigma_j} T_y G_j^*(z,y)\mu_j(y)\, d_y\sigma = \\
&= f_l^-(z); \quad (l = \overline{1, n};\ z\in \sigma_l^-).
\end{aligned}\right\}$$

Аналогично доказательству леммы, получаем, что $V_K^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \epsilon D_K$ и $W_j^{(0)}(x) \equiv 0$, $x \epsilon Q_j$. Так как $\nu_K^{(0)}(y)$ и $\mu_j^{(0)}(y)$ являются предельными значениями $V_K^{(0)}(x)$ и $W_j^{(0)}(x)$ на поверхностях S_K и σ_j, то $\nu_K^{(0)}(y) \equiv 0$, $\mu_j^{(0)}(y) \equiv$ $\equiv 0$. Таким образом, однородная система имеет только тривиальное решение, а следовательно, система интегральных уравнений имеет единственное решение.

В заключение отметим, что в работе [2] использованным методом была решена аналогичная задача для эллиптических систем с коэффициентами, обладающими специальными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости/ В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В.Бурчуладзе. – М.: Наука, 1976, 663 с. 2. Марія Д. Мартиненко. Розвязки ел:птичних систем у многозвязних областях з щілинами. – Вісник Львівського університету. Сер. мех.мат., вип. 12, 1977, с. 32–36.

УДК 539.3

Р.А.РОМАНЧИК (БГУ)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ КОНТАКТА УПРУГИХ ТЕЛ

Понятие "метод граничных элементов" (МГЭ) введено в работе [1] применительно к решению уравнений Лапласа. В настоящей работе МГЭ использовался для решения задачи контакта упругих тел.

Постановка контактных задач плоской теории упругости имеет вид

$$\mu \Delta u_{i\alpha} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial x_i} = 0; \; i = 1, 2; \; x \epsilon S_\alpha, \alpha = 1, 2;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \; \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \tag{1}$$

где α и μ–постоянные Ламе; S_α – плоские области, ограниченные замкнутыми гладкими кривыми Γ_α (рис. 1). Граничные условия задачи имеют вид

$$u_i|\Gamma_\alpha^{(u)} = \varphi_{i\alpha}(x); \; x \epsilon \Gamma_\alpha^{(u)}; \; t_i^{(n)}|_{\Gamma_\alpha^{(\sigma)}} = q_{i\alpha}(x); \, x \epsilon \Gamma_\alpha^{(\sigma)}, \tag{2}$$

где $\alpha = 1, 2$.

Здесь u_i и $t_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij} u_j$ – компоненты вектора перемещений и напряжений на площадке с нормалью n; $\Gamma_\alpha^{(u)}$, $\Gamma_\alpha^{(\sigma)}$ – части границы Γ_α, на которых заданы перемещения и напряжения.