

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЕКТАХ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ТЕЛ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ ПРИ СЛОЖНОМ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

1. Оптимальное проектирование упругих элементов конструкций состоит в выборе конфигурации элемента, обеспечивающей наибольшую несущую способность на множестве конфигураций, допустимых по деформативным, прочностным, технологическим и другим признакам [1]. В математическом аспекте указанная проблема принадлежит классу нелинейных обратных задач теории упругости для области V с границей S , содержащей неизвестную заранее часть S_2 , и может быть сформулирована в виде

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (V); \quad \sigma_{ij;n_j} = T_i^* \quad (S_T = S_{T1} + S_{T2}); \quad (1)$$

$$g_{ij}(\sigma_{mn}, e_{mn}) = 0 \quad (V); \quad k_{ij}(e_{mn}; u_{m,n}) = 0 \quad (V); \quad (2)$$

$$u_i = u_i^* \quad (S_u = S_{u1} + S_{u2});$$

$$W(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (V + S) \quad (i, j, m, n = 1, 2), \quad (3)$$

где принято, что части S_T и S_u поверхности S с заданными значениями усилий T_i^* и перемещений u_i^* могут содержать как фиксированные (отмеченные индексом "1"), так и варьируемые при решении задачи (отмеченные индексом "2") участки; через g_{ij} , k_{ij} для краткости обозначены операторы определяющих уравнений упругости и соотношений Коши, и, кроме того $u_{mjn} = \partial u_m / \partial x_n$. Ограничение (3) отвечает какой-либо из классических теорий прочности, поэтому допустимая область N изменения T_i^* , u_i^* , отвечающая условиям эксплуатации элемента V , одновременно должна определять (для фиксированной V) решение упругой задачи (1), (2), не нарушающее неравенства (3). Несущая способность при этом определяется как некоторая мера области N , например, наибольшее значение параметра λ при пропорциональном нагружении $T_i^* = T_i^0 \lambda$, если функций $T_i^0(x_K)$, $u_i^*(x_K)$ не зависят от λ .

Класс $\{V, N\}$ допустимых конфигураций V (с учетом его назначения) и отвечающих им областей нагружения N определяет множество допустимых решений задачи (1) – (3), на котором и отыскивается оптимальный проект – форма области V , обеспечивающая наибольшую несущую способность.

Из сказанного следует, что отыскание оптимального проекта требует замыкания системы (1) – (3) с помощью дополнительных соотношений для определения части поверхности $S_2 = S_{T2} + S_{u2}$, варьируемой в процессе решения.

Для случая двухосного растяжения бесконечной пластины с одним или несколькими незагруженными отверстиями решение задачи (1) – (3) построено в замкнутом виде в [1], где в качестве дополнительного принималось условие равнопрочности на контурах отверстий:

$$\bar{\sigma}_t = \bar{\sigma}_0 \quad (S_{T2} = S_T), \quad (4)$$

где $\bar{\sigma}_t$, $\bar{\sigma}_0$ – тангенциальная компонента тензора напряжений (t-касательная на S) и предел прочности при растяжении соответственно. Оптимальность указанного решения доказана в работе [2], где рассматривался также случай пластины с жесткими включениями; условие (4) в последнем случае заменялось более общим предельным соотношением

$$\tau = \tau_0 \quad (S_2) \quad (5)$$

для интенсивности касательных напряжений τ . В указанном виде критерий равнопрочности справедлив и для других типов напряженных состояний – кручения, изгиба (см. также [1]).

Существенным ограничением применимости результатов [1, 2] является зависимость оптимальной формы концентраторов от параметра неоднородности $p = \bar{\sigma}_y^\infty / \bar{\sigma}_x^\infty$ для предельных усилий $\bar{\sigma}_x^\infty$, $\bar{\sigma}_y^\infty$, приложенных к пластине на бесконечности. Поэтому для нагружений с изменяющимся параметром p условие равнопрочности утрачивает смысл и должно быть обобщено с учетом истории изменения внешних нагрузок. Указанное обобщение применительно к пластинам с отверстиями рассматривается ниже.

2. Будем считать изменение T_1^* , u_1^* в процессе нагружения параметризованным с помощью совокупности параметров $\lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ из области λ .

Поскольку для всех значений параметров из λ одновременно удовлетворить условию (4) невозможно при любом выборе S_2 , примем в качестве целевого минимизируемый на $\{V, N\}$ функционал

$$Q = \int_{\Lambda} \int_{S_2} (\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_0)^2 f(\lambda) d\lambda ds. \quad (6)$$

Здесь $f(\lambda)$ – плотность распределения, учитывающая вклад состояния с параметрами λ ($\int f d\lambda = 1$). В частности, для постоянных значений T_1^* , u_1^* следует принять в качестве $f(\lambda)$ k -мерную функцию Дирака $\delta(\lambda - \lambda_0)$. Выбор постоянной $\bar{\sigma}_0$ будет указан ниже.

Необходимые условия экстремума получаются, как обычно, при обращении в нуль первой вариации δQ с учетом связей (1), (2) и полагая вариации $\delta \bar{\sigma}_{ij}$, δe_{ij} , δu_i независимыми взаимно и от параметров λ . Вариация функционала (6) для переменной области V имеет вид

$$\delta Q = \int_{\Lambda} f d\lambda \int_{S_2} \left\{ 2(\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_0) [2\bar{\sigma}_{ij;n} t_j^i (\delta n)^1 + \delta \bar{\sigma}_{ij} t_j^i t_j^i + \right. \quad (7)$$

$$\left. + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial n} t_j^i \delta n + (\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_0)^2 \kappa \delta n \right\} ds,$$

где δn – расстояние вдоль нормали n_i между кривой S_2 и ее измененной формой S_2^1 (рис. 1); t_i – вектор касательной на S_2 , κ – кривизна на S_2 .

Будем считать внешние нагрузки на S_{T2} нулевыми, причем для пластины с отверстиями поверхность S_{u2} отсутствует:

$$T_i^* = 0 \quad (S_{T2}). \quad (8)$$

Полагая функции σ_{ij} , u_i непрерывно дифференцируемыми вплоть до границы S и вводя множители Лагранжа p_i , q_i для связей (1), с учетом (8) находим:

$$\delta \int_V p_i \sigma_{ij,j} dv = \int_V p_i \delta \sigma_{ij,j} dv = \int_S \delta \sigma_{ij,n_j} p_i ds - \int_V p_{i,j} \delta \sigma_{ij} dv; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta \int_{S_{T1}} (\sigma_{ij,n_j} - T_i^*) q_i ds &= \int_{S_{T1}} q_i \delta \sigma_{ij,n_j} ds; \quad \delta \int_{S_{T2}} q_i \sigma_{ij,n_j} ds = \\ &= \int_{S_{T2}} q_i [\delta \sigma_{ij,n_j} - \sigma_{ij,t_j} (\delta n)' + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial n} n_j \delta n] ds. \end{aligned}$$

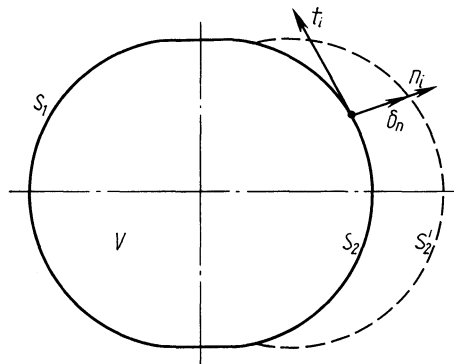


Рис. 1. Варирование области.

Имея в виду лишь одно из естественных краевых усилий для уравнений Эйлера вариационной задачи, получающееся на $S_2 = S_{T2}$ в качестве множителя при вариации $\delta \sigma_{ij}$, вариации связей (2) в дальнейшем не понадобятся. Из (7), (9) получаем

$$\int_{S_2} [2 \int_{\Lambda} (\sigma_t - \sigma_0) fd\lambda] t_i t_j \delta \sigma_{ij} ds + \int_{S_2} (p_i + q_i) \delta \sigma_{ij,n_j} ds = 0,$$

откуда в силу произвольности $\delta \sigma_{ij}$ имеем на S_2

$$[2 \int_{\Lambda} (\sigma_t - \sigma_0) fd\lambda] t_i t_j + (p_i + q_i) n_j = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (10)$$

Вследствие ортогональности слагаемых в (10) заключаем, что

$$\int_{\Lambda} (\sigma_t - \sigma_0) fd\lambda = 0 \quad (S_2). \quad (11)$$

Соотношение (11) является искомым обобщением условия равнопрочности (4) при переменном нагружении и переходит в последнее для фиксированной нагрузки $f(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0)$:

$$\int_{\Lambda} [\sigma_t(\lambda, s) - \sigma_0] \delta(\lambda - \lambda_0) d\lambda = \sigma_t(\lambda, s) - \sigma_0 = 0.$$

Отметим, что аналогичный вывод легко может быть проведен и для случая, когда варьируется часть S_{u2} линии S_u (полагая при этом $u_1^* = 0$), а также для более общего условия (5).

3. Рассмотрим приложение условия (11) к задаче о бесконечной пластине со свободными от усилий отверстиями, подвергнутой двухосному нагружению $\sigma_{11} \rightarrow \sigma_1^\infty, \sigma_{22} \rightarrow \sigma_2^\infty, \sigma_{12} \rightarrow 0 (x_1, x_2 \rightarrow \infty)$, причем внешние усилия являются переменными: $\sigma_1^\infty = \sigma_1^\infty(\lambda); \sigma_2^\infty = \sigma_2^\infty(\lambda)$.

Обозначим через $\sigma_{ij}(\lambda, x_K)$ тензор напряжений в произвольный момент нагружения λ . В силу линейности задачи очевидно [3], что

$$\sigma_{ij}(x_K, \lambda) = \sigma_1^\infty(\lambda) \sigma_{ij}^{(1)}(x_K) + \sigma_2^\infty(\lambda) \sigma_{ij}^{(2)}(x_K), \quad (12)$$

причем

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} \rightarrow 1; \quad \sigma_{22}^{(2)} \rightarrow 1; \quad \sigma_{22}^{(1)}; \quad \sigma_{11}^{(2)}; \quad \sigma_{12}^{(1)}, \quad \sigma_{12}^{(2)} \rightarrow 0 \\ (x_1, x_2 \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (13)$$

Поэтому вследствие (11) тензор осредненных напряжений

$$\sigma_{ij}^0 = \int_{\Lambda} \sigma_{ij}(x_K, \lambda) f d\lambda = k_1 \sigma_{ij}^{(1)} + k_2 \sigma_{ij}^{(2)} \quad (k_{1,2} = \int_{\Lambda} \sigma_{1,2}^\infty(\lambda) f d\lambda) \quad (14)$$

удовлетворяет (11) на контурах отверстий S_2 соотношению

$$\sigma_t^0 = \sigma_0 \quad (\sigma_t^0 = \sigma_{ij}^0 t_i t_j). \quad (15)$$

Таким образом, согласно (15), условие равнопрочности (4) должно удовлетворяться для решения (12) в некоторый промежуточный момент нагружения, определяемый соотношением параметров k_1, k_2 .

Решение задачи (13), (15) при отсутствии на S_2 усилий

$$\sigma_n^{(1)} = \sigma_{nt}^{(1)} = 0; \quad \sigma_n^{(2)} = \sigma_{nt}^{(2)} = 0 \quad (16)$$

найдем посредством комплексного представления Колосова–Мусхелишвили:

$$\begin{aligned} \sigma_n + \sigma_t &= 2(\phi(\zeta) + \overline{\phi(\zeta)}); \\ \sigma_t - \sigma_n + 2i \sigma_{tn} &= 2\zeta^2 \frac{\omega'}{\overline{\omega'}} \left(\overline{\omega} \frac{\zeta'}{\omega'} + \psi \right) \quad (S); \end{aligned}$$

$$(\phi(\zeta) = \phi(\omega(\zeta)); \quad \Psi(\zeta) = \Psi(\omega(\zeta))),$$

где $z = \omega(\zeta)$ – конформное отображение исходной плоскости $z = x_1 + ix_2$ на вспомогательную плоскость с n выброшенными кругами [1]. Ограничиваясь

для краткости случаев одного отверстия ($n = 1$), в соответствии с (12), (14) положим

$$\begin{aligned} \phi(\zeta, \lambda) &= \sigma_1^\infty \phi_1(\zeta) + \sigma_2^\infty \phi_2(\zeta); \quad \psi(\zeta, \lambda) = \sigma_1^\infty \psi_1(\zeta) + \sigma_2^\infty \psi_2(\zeta); \\ \phi_0(\zeta) &= \int_{\Lambda} \phi \, fd\lambda; \quad \psi_0(\zeta) = \int_{\Lambda} \psi \, fd\lambda. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку функция $\omega(\zeta)$ неизвестна, будем искать вначале осредненные функции (18). Из (13), (15), (17) при $\omega \rightarrow \zeta, \zeta \rightarrow \infty$ следует, что

$$\phi_0 + \bar{\phi}_0 \rightarrow \frac{k_1 + k_2}{2}; \quad \psi_0 \rightarrow \frac{k_2 - k_1}{2} \quad (\zeta \rightarrow \infty). \quad (19)$$

Кроме того, на окружности $|\zeta| = 1$, являющейся образом контура отверстия S_2 , согласно (15)–(17) имеем

$$\phi_0 + \bar{\phi}_0 = -\frac{1}{2} \sigma_0; \quad 2\zeta^2 \frac{\omega'}{\omega} \left(\bar{\omega} \frac{\phi_0'}{\omega'} + \psi_0 \right) = \sigma_0. \quad (20)$$

Из (19), (20) следует, что во внешности круга $|\zeta| \geq 1$

$$\phi_0(\zeta) = \frac{1}{4} \sigma_0 + iC; \quad k_1 + k_2 = \sigma_0 \quad (21)$$

(C – постоянная, определяемая вращением на бесконечности).

Второе краевое условие в (20) тогда запишется

$$\psi_0 \omega' = \frac{1}{2} \sigma_0 \bar{\omega}' \bar{\zeta}^2. \quad (22)$$

Решение задачи (19), (22) для $\psi(\zeta), \omega(\zeta)$ достигается сведением ее к задаче линейного сопряжения и имеет вид

$$\omega(\zeta) = \zeta - \frac{2a}{\sigma_0} \cdot \frac{1}{\zeta}; \quad \psi_0 \omega' = a + \frac{\sigma_0}{2\zeta^2} \quad \left(a = \frac{k_2 - k_1}{2} \right). \quad (23)$$

Из (23) следует, что контур S_2 является эллипсом с параметром

$$m = \frac{k_1 - k_2}{\sigma_0} \left(\frac{|k_1 - k_2|}{\sigma_0} = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right| \leq 1 \right).$$

Функции $\phi_k(\zeta), \psi_k(\zeta)$ ($k = 1, 2$) теперь могут быть найдены способом, указанным в [3].

Полагая, в частности для полученного выше решения $f = \delta(\lambda - \lambda_0)$, из (12), (14) находим

$$k_1 = \sigma_1^\infty; \quad k_2 = \sigma_2^\infty, \quad \sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij},$$

поэтому согласно (16) заключаем, что для фиксированных нагрузок $\sigma_1^\infty, \sigma_2^\infty$ указанное решение совпадает с полученным в работе [1].

С целью оценки концентрации напряжений в общем случае примем в (12) траекторию нагружения

$$\sigma_1^\infty = p\lambda; \quad \sigma_2^\infty = p(1-\lambda); \quad f(\lambda) = 1/\lambda_0 \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0). \quad (24)$$

Из (14), (21) имеем

$$k_1 = \frac{1}{2} p \lambda_0; \quad k_2 = p(1 - \frac{1}{2} \lambda_0); \quad p = \sigma_0, \quad m = \lambda_0 - 1. \quad (25)$$

Решение (12) согласно формулам (82) работы [3] дает значение тангенциального напряжения на S_2 в любой момент нагружения, равное

$$\sigma_t = \frac{p}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} [\lambda(1 - m^2 + 2m - 2\cos 2\theta) + (1 - \lambda)(1 - m^2 - 2m + 2\cos 2\theta)]. \quad (26)$$

При $\lambda_0 \rightarrow 0$ или $\lambda_0 = 1$ из (25) следует $m = -1$ или $m = 0$, поэтому при одноосном ($\sigma_2^\infty = p$, $\sigma_1^\infty = 0$) или двухосном симметричном нагружении оптимальным проектом является пластина с разрезом или круговым вырезом соответственно, что очевидно непосредственно.

Из соотношений (24) – (26) следует также, что полученная конфигурация отверстия удовлетворяет в процессе нагружения условию (4) лишь при значении параметра $\lambda = \lambda_0/2$.

В общем случае анализ зависимости (26) показывает, что наименьшее значение максимального напряжения по формуле (26) за весь период нагружения в выражения (24) достигается при выборе $m = \lambda_0 - 1$ согласно зависимости (25), позволяя, в частности, достигнуть выигрыша в прочности по сравнению с вариантом пластины, имеющей круговые отверстия.

Отметим, что согласно критерию прочности наибольшее значение напряжения в теле не должно превышать допустимого значения σ_c .

Поэтому согласно (26) имеем

$$\max_{\lambda, \theta} |\sigma_t(\lambda, \theta)| = \sigma_c \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (27)$$

Соотношение (27) определяет допустимый уровень усилия $p = \sigma_0$. В частности, для симметричного нагружения (24) при $\lambda_0 = 1$ и оптимального проекта пластины получаем

$$3p = 3\sigma_0 = \sigma_c; \quad p = \sigma_0 = \frac{\sigma_c}{3}.$$

Аналогичным образом могут быть построены оптимальные проекты пластин с несколькими отверстиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П., Ершов Л.В. Механика разрушения. – М.: Наука, 1976. – 224 с.
2. Ибрагимов В.А. О равнопрочных конфигурациях упругих тел. – Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1983, № 4, с. 33.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.