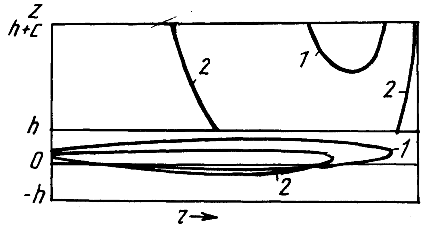

Рис. 4. Распределение по поперечному сечению пластинки областей пластических деформаций в металлическом слое и зон физической нелинейности в полимерном слое: 1 – при $t = 0$; 2 – при $t = t_0$ (в полимере внутри кривых, в металле – снаружи)

3. При расчетах круглых многослойных пластин точное решение задачи теории упругости может быть получено по аналогии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с. 2. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. – М.: Наука, 1972. – 327 с. 3. Старовойтов Э.И. О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек. – Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1980, № 2, с. 92–96. 4. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Нелинейные уравнения пологих многослойных оболочек регулярного строения. – МТТ, 1967, № 1, с. 163–169. 5. Наместников В.С., Хвостунков А.А. Ползучесть дуралюминия при постоянных и переменных нагрузках. – ПМТФ, 1960, № 4, с. 90–95. 6. Гольдман А.Я. Прочность конструкционных пластмасс. – Л.: Машиностроение, 1979. – 320 с. 7. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968. – 416 с.

УДК 539.3

Н.П. КАРЕТКО, канд. физ.-мат. наук (БГУ)

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ

При исследовании на термопрочность пластинчатых элементов конструкций, работающих в условиях нестационарных тепловых режимов (жидкостная закалка, сварка и др.), возникает необходимость в определении температурных напряжений в пластинках с учетом теплообмена. Такие задачи для случаев, когда на контуре заданы напряжения или перемещения, достаточно полно исследованы в работе [1] и других работах, где использованы аналогичные методы расчета.

Известный интерес представляют смешанные нестационарные задачи термоупругости, когда на одних участках контура заданы перемещения, а на остальных – напряжения.

В данной работе дано решение смешанной квазистатической задачи термоупругости для полубесконечной пластинки, нагреваемой движущимся источником тепла.

Считая, что однородная изотропная полубесконечная пластинка находится в обобщенном плоском термонапряженном состоянии и ее срединная плоскость занимает область D^- $(y < 0)$, получаем формулы [2]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + a_1 T; \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \Psi_0; \quad (2)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \varkappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} - \Psi_0; \quad (3)$$

$$2\mu(u+iv) = \varkappa\varphi(z) + \varphi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)} - \psi_0; \quad (4)$$

$$X + iY = -i[\varphi(z) - \varphi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)} + \psi_0]_A^B; \quad (5)$$

$$M = \mathrm{Re}\,[\chi(z) - z\psi(z) - z\bar{z}\Phi(z) + U_0 - x\frac{\partial U_0}{\partial x} -$$

$$- y\frac{\partial U_0}{\partial y}]_A^B; \quad (6)$$

$$\psi_0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial x}, \quad \psi_0 = 2\frac{\partial U_0}{\partial\bar{z}}, \quad \tau = \frac{kt}{c\rho}, \quad a_1 = a_0 E, \quad (7)$$

где T – температура, усредненная по толщине пластинки и удовлетворяющая уравнению

$$\Delta T - \varkappa_1^2 T = \frac{\partial T}{\partial\tau} - F; \quad (8)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \varkappa_1^2 = \frac{\beta}{k\delta_0}, \quad F = \varkappa_1^2 T_c(x, y, \tau) + \frac{Q(x, y, \tau)}{k},$$

где β – коэффициент теплоотдачи; $Q(x, y, \tau)$ – усредненная по толщине плотность источников тепла; $T_c(x, y, \tau)$ – температура внешней среды, омывающей боковые поверхности пластинки; U_0 – частное решение уравнения

$$\Delta U_0 = a_1 T.$$

Остальные коэффициенты общеизвестны [3, 4].

Потребуем, чтобы напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} равнялись нулю на бесконечности. Тогда на основании формул (1)–(8) получаем, что для больших $|z|$ функции $\Phi(z)$, Ψ_0 имеют вид:

$$\Phi(z) = \Gamma' + \frac{\gamma_1'}{z} + \frac{\gamma_2'}{z^2} + 0\left(\frac{1}{z^3}\right), \quad z \in D^-; \quad (9)$$

$$\Phi(z) = \Gamma'' + \frac{\gamma_1''}{z} + \frac{\gamma_2''}{z^2} + 0\left(\frac{1}{z^3}\right), \quad z \in D^+; \quad (10)$$

$$\Psi_0 = \Gamma_0 + \frac{d_1'}{z} + \frac{d_1''}{\bar{z}} + \frac{d_2'}{z^2} + \frac{d_2''}{\bar{z}^2} + 0\left(\frac{1}{|z|^3}\right); \quad (11)$$

$$\Gamma' = B' + iC'; \quad \Gamma'' = B'' + iC'', \quad C' = \frac{2\mu\varepsilon_\infty}{1 + \varkappa}; \quad B' = -\frac{a_1 T_\infty}{4}; \quad (12)$$

$$B'' = \mathrm{Re}\,\Gamma_0 - \frac{a_1 T_\infty}{4}\ ;\ \mathrm{Im}\,\gamma_2' = -\frac{M}{2\pi} - \frac{\mathrm{Im}\,d_2'}{2}; \tag{13}$$

$$C'' = C' + \mathrm{Im}\,\Gamma_0;\ \mathrm{Im}\,\gamma_2'' = -\frac{M}{2\pi} + \frac{\mathrm{Im}\,d_2'}{2} + \mathrm{Im}\,d_2''; \tag{14}$$

$$\gamma_1' = -\frac{X+iY}{2\pi} - d_1'\ ;\ \gamma_1'' = -\frac{X+iY}{2\pi} + d_1'', \tag{15}$$

где Γ_0, d_1', d_1'', d_2', d_2'' – известные коэффициенты; $X + iY$ – главный вектор внешней нагрузки на контуре L'; M – главный момент внешней нагрузки на контуре L' относительно начала координат; ε_∞, T_∞ – вращение пластинки и ее температура на бесконечности.

Предположим, что пластинка защемлена на участке $L' = [-a, a]$, а на остальной части контура $L'' = L - L'$ и на бесконечности отсутствует внешняя нагрузка, т.е. справедливы условия [4]:

$$u + iv = 0,\ x \in L';\quad \sigma_y - i\tau_{xy} = 0,\ x \in L''; \tag{16}$$

$$\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_y^\infty = 0\,.$$

Теплоизолированная по контуру $L(y = 0)$ пластинка, температура которой в начальный момент времени равна нулю, нагревается линейным источником тепла мощности q_0, движущимся с постоянной скоростью v_0 в положительном направлении полупрямой (вглубь пластинки) $y = y_0 - \mathrm{tg}\,a\,(x - x_0)$, а через ее боковые плоскости осуществляется теплообмен с внешней средой нулевой температуры. Здесь x_0, y_0 – начальные координаты источника тепла; a – угол между направлением движения источника и осью X.

На основании формул (2), (3), (16) получаем краевую задачу:

$$æ\Phi^-(x) + \Phi^+(x) = \Psi_1(x,\tau),\ x \in L'; \tag{17}$$

$$\Phi^-(x) - \Phi^+(x) = -\Psi_1(x,\tau),\ x \in L''; \tag{18}$$

$$\Psi_0 = -\frac{a_1 q_0 \exp(-æ_1^2\tau)}{8\pi k\,\delta_0}\int_0^\tau \Big\{\frac{2}{(\bar z - \bar z_1(\tau_0))^2} + \frac{2}{(\bar z - \bar z_1(\tau_0))^2} -$$

$$-\Big[\frac{x - x_1(\tau_0)}{(\tau - \tau_0)(\bar z - z_1(\tau_0))} + \frac{2}{(\bar z - \bar z_1(\tau_0))^2}\Big] \times$$

$$\times \exp\Big[-\frac{(x - x_1(\tau_0))^2 + (y + y_1(\tau_0))^2}{4(\tau - \tau_0)}\Big] - \Big[\frac{x - x_1(\tau_0)}{(\tau - \tau_0)(\bar z - \bar z_1(\tau_0))} +$$

$$+ \frac{2}{(\bar z - \bar z_1(\tau_0))^2}\Big]\exp\Big[-\frac{(x - x_1(\tau_0))^2 + (y - y_1(\tau_0))^2}{4(\tau - \tau_0)}\Big]\Big\} \times$$

$$\times \exp(æ_1^2\tau_0)\,d\tau_0\,; \tag{19}$$

$$\Psi_1(x,\tau) = \Psi_0(x,0,\tau),\ z_1(\tau_0) = x_1(\tau_0) + iy_1(\tau_0),\ x_1(\tau_0) = x_0 + v_1\tau_0\cdot\cos\alpha,\ y_1(\tau_0) = y_0 - v_1\tau_0\cdot\sin\alpha,\ v_1 = 2\mathrm{Pe}.$$

Здесь $\mathrm{Pe} = v_0 c\rho\delta_0/2k$ – критерий Пекле; δ_0 – полутолщина пластинки.

Решая краевую задачу (17), (18), определяем искомый комплексный потенциал, удовлетворяющий условиям (9)–(15):

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\Psi_1(t,\tau)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + (C_0 + C_1 z)X(z);$$

$$X(z) = (z+a)^{\gamma}(z-a)^{\bar\gamma};\ C_0 = \frac{i2\mu\varepsilon_\infty}{1+æ};\ C_1 = \frac{2\mu a\ln æ\,\varepsilon_\infty}{\pi(1+æ)};\tag{20}$$

$$\varepsilon_\infty = -\frac{\pi(1+æ)}{2\mu a^2(\pi^2+\ln^2 æ)}\left[\frac{1}{\sqrt{æ}}\int_{-a}^{a}\Psi_1(t,\tau)\sqrt{|a^2-t^2|}\times\right.$$

$$\times\sin\left(\frac{\ln æ}{2\pi}\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right|\right)dt + \int_{a}^{\infty}[\Psi_1(t,\tau) - \Psi_1(-t,\tau)]\times$$

$$\left.\times\cos\left(\frac{\ln æ}{2\pi}\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right|\right)dt\right];\ \gamma = -\frac{1}{2} + i\frac{\ln æ}{2\pi}.$$

Для полного решения задачи выпишем еще формулу для определения температуры, которая как и для функции Ψ_0, получена методом интегральных преобразований Фурье по x и Лапласа по τ:

$$T = \frac{q_0\exp(-æ_1^2\tau)}{4\pi k\delta_0}\int_0^{\tau}\frac{\exp(æ_1^2\tau_0)}{(\tau-\tau_0)}\left[\exp\left(-\frac{(y-y_1(\tau_0))^2}{4(\tau-\tau_0)}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(y+y_1(\tau_0))^2}{4(\tau-\tau_0)}\right)\right]\exp\left[-\frac{(x-x_1(\tau_0))^2}{4(\tau-\tau_0)}\right]d\tau_0.\tag{21}$$

Следовательно, термонапряженное состояние полубесконечной изотропной пластинки определяется по формулам (1), (2), (19)–(21).

ЛИТЕРАТУРА

1. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи/Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, В.И. Громовык, В.Л. Лозбень. – Киев: Наук. думка, 1977. – 160 с. 2. Каретко Н.П. Об одном решении нестационарных задач термоупругости для полуплоскости. – Вестник БГУ им. В.И. Ленина, 1976, сер. 1, № 2, с. 47–48. 3. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1972. – 200 с. 4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.