

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОЙ ПЛАСТИНКИ

В связи с широким применением в промышленности слоистых элементов конструкций, набранных из новых материалов, и возросшими требованиями инженерной практики к точности расчетов актуальным становится учет реономных физически нелинейных свойств полимеров и вязкоупругопластических свойств металлов, из которых составляется пакет. Математическая сложность соответствующих краевых задач требует применения для их решения численных методов и современных быстродействующих ЭВМ.

1. Постановка задачи. Рассматривается изгиб круглой двухслойной пластинки под действием симметрично распределенной по ее поверхности нагрузки. Цилиндрическая система координат r, φ, z связывается со срединной плоскостью несущего слоя, причем ось z ей перпендикулярна и направлена в сторону полимерного слоя. Для несущего металлического слоя (толщины $2h$) принимаются гипотезы Кирхгофа, для мягкого полимерного (толщины s) — гипотеза Рейнснера о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали.

Предполагается, что напряжения и деформации в слоях в областях пластического деформирования металлов и проявления нелинейных свойств полимеров описываются при активном нагружении одинаковыми уравнениями состояния:

$$\left. \begin{aligned} s_{\alpha\beta}^{(k)} &= 2G_k^* (1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)})) \mathfrak{E}_{\alpha\beta}^{(k)} \\ s_{\alpha z}^{(2)} &= G_2^* (1 - \omega_2(\varepsilon_u^{(2)})) \Psi \end{aligned} \right\} \text{при } \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_s^{(k)}, \quad (1)$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k^* \varepsilon^{(k)}, \quad (K_1^* \equiv K_1^0), \quad (\alpha, \beta = r, \varphi).$$

Если интенсивность деформаций в k -м слое ($k=1$ — несущий, $k=2$ — мягкий слой) $\varepsilon_u^{(k)}$ не достигает некоторого своего порогового значения $\varepsilon_s^{(k)}$, то $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}) \equiv 0$ и материалы слоев деформируются линейно: металл — упруго, полимер — вязкоупруго.

Здесь G_k^* , K_k^* и R_k^* , V_k^* — интегральные операторы, преобразующие некоторую функцию времени $\varphi(t)$ по следующему закону:

$$G_k^* \varphi(t) \equiv G_k^0 (1 - R_k^*) \varphi(t) \equiv G_k^0 (\varphi(t) - \int_0^t R_k(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau);$$

$$K_k^* \varphi(t) \equiv K_k^0 (1 - V_k^*) \varphi(t) \equiv K_k^0 (\varphi(t) - \int_0^t V_k(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau).$$

Здесь G_k^0, K_k^0 – константы упругости; Ψ – относительный сдвиг в мягком слое (угол поворота его нормали, дополнительный к углу поворота нормали несущего слоя); $R_k(t), V_k(t)$ – ядра сдвиговой и объемной релаксации; $\omega_1(\epsilon_u^{(1)})$ – функция пластичности, совпадающая при отсутствии интегральных составляющих в [1] с аналогичной функцией А.А. Ильюшина в теории малых упругопластических деформаций [1]; $\omega_2(\epsilon_u^{(2)})$ – универсальная функция нелинейности полимера, определяемая по результатам экспериментальных исследований нелинейной ползучести материала [2].

Проекции внешней нагрузки на координатные оси r и z обозначим $p(r, t)$ и $q(r, t)$. $\mathcal{R}_{r\varphi}^{(k)}$ и $\mathcal{Z}_{r\varphi}^{(k)}$ равны нулю, а перемещения в пластинке не зависят от координаты φ .

Деформации можно выразить через три неизвестные функции: $w(r, t)$ – прогиб пластинки, $\Psi(r, t)$ – относительный сдвиг и $u(r, t)$ – радиальные перемещения координатной плоскости соотношениями, подобными применяемым для трехслойных пластин [3]. Краевая задача замыкается уравнениями равновесия и силовыми граничными условиями, которые могут быть получены с помощью вариационного метода по аналогии с [4]. В конечном итоге имеем систему трех нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно указанных в данной работе неизвестных функций, которые должны удовлетворять на границе определенным условиям.

2. В связи с существенной нелинейностью рассмотренной задачи для ее решения удобно применять методы линейных приближений, типа метода упругих решений А.А. Ильюшина [1]. В этом случае конечная система уравнений на n -м шаге приближения имеет вид:

$$\begin{cases} L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \Psi^{(n)} + a_3 w_{,r}^{(n)}) = -p + p_{\omega}^{(n-1)}; \\ L_2(a_2 u^{(n)} + \frac{2}{3} ca_2 \Psi^{(n)} - a_4 w_{,r}^{(n)}) - cG_2 \Psi^{(n)} = h_{\omega}^{(n-1)}; \\ L_3(a_3 u^{(n)} + a_4 \Psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)}) = -q + q_{\omega}^{(n-1)}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $a_1 = 2h(K_1^0 + \frac{4}{3}G_1^0) + c(K_2^0 + \frac{4}{3}G_2^0)$, $a_2 = \frac{c^2}{2}(K_2^0 + \frac{4}{3}G_2^0)$;

$a_3 = c(h + \frac{c}{2})(K_2^0 + \frac{4}{3}G_2^0)$, $a_4 = c^2(\frac{h}{2} + \frac{c}{3})(K_2^0 + \frac{4}{3}G_2^0)$;

$a_5 = \frac{2}{3}h^3(K_1^0 + \frac{4}{3}G_1^0) + c(h^2 + hc + \frac{c^2}{3})(K_2^0 + \frac{4}{3}G_2^0)$,

где L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы, преобразующие координатную функцию $\varphi(r)$ в соответствии с формулами:

$$L_2(\varphi) = (\frac{1}{r}(r\varphi)_{,r})_{,r}; \quad L_3(\varphi) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(\varphi))_{,r}.$$

Члены с индексом "ω" являются поправками на реономность, физическую нелинейность и пластичность материалов, они носят название дополнительных "внешних" нагрузок и определяются по результатам предыдущего приближения:

$$p_{\omega}^{(n-1)} = T_{r,r}^{\omega(n-1)} + \frac{1}{r} [T_r^{\omega(n-1)} - T_{\varphi}^{\omega(n-1)}]; q_{\omega}^{(n-1)} = M_{r,rr}^{\omega(n-1)} + \frac{1}{r} (2M_{r,r}^{\omega(n-1)} - M_{\varphi,r}^{\omega(n-1)});$$

$$h_{\omega}^{(n-1)} = H_{r,r}^{\omega(n-1)} + \frac{1}{r} (H_r^{\omega(n-1)} - H_{\varphi}^{\omega(n-1)}) - Q^{\omega(n-1)} ;$$

$$T_a^{\omega(n-1)} \equiv \sum_k T_a^{(k)\omega(n-1)} \equiv \sum_k \int_{h_k} \sigma_a^{(k)\omega(n-1)} dz ;$$

$$M_a^{\omega(n-1)} \equiv \sum_k M_a^{(k)\omega(n-1)} \equiv \sum_k \int_{h_k} \sigma_a^{(k)\omega(n-1)} z dz ;$$

$$H_a^{\omega(n-1)} = M_a^{(2)\omega(n-1)} - h T_a^{(2)\omega(n-1)} ;$$

$$\sigma_a^{(k)\omega(n-1)} = 2G_k^0 (\omega_k^{(n-1)} + R_k^* (1 - \omega_k^{(n-1)})) \varepsilon_a^{(k)(n-1)} + 3K_k^0 V_k^* \varepsilon^{(k)(n-1)} ;$$

$$Q^{\omega(n-1)} = G_k^0 \int_h^{h+c} (\omega_2^{(n-1)} + R_k^* (1 - \omega_2^{(n-1)})) \Psi^{(n-1)} dz ,$$

$$\omega_k^{(n-1)} \equiv \omega_k \varepsilon_u^{(k)(n-1)} .$$

Запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; h_k — толщина k -го слоя. Линейные размеры пластинки и координата r отнесены к радиусу пластинки, силовые характеристики — к единице давления 1 Па.

Преобразование типа (2) необходимо провести и для граничных условий.

В процессе решения из системы (2) для функции $\Psi^{(n)}(r, t)$ следует неоднородное модифицированное уравнение Бесселя:

$$r^2 \Psi_{,rr}^{(n)} + r \Psi_{,r}^{(n)} - (1 + \beta^2 r^2) \Psi^{(n)} = r^2 f^{(n-1)} . \quad (3)$$

Здесь $f^{(n-1)} = \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} [(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_3 b_2}{a_1 b_3}) (p - p_{\omega}^{(n-1)}) +$

$$+ \frac{b_2}{b_3 r} [\int (q - q_{\omega}^{(n-1)}) r dr + h_{\omega}^{(n-1)}] ; \beta^2 = \frac{c b_3 G_2^0}{b_1 b_3 - b_2^2} ;$$

$$b_1 = \frac{2}{3} ca_2 - \frac{a_2^2}{a_1} ; \quad b_2 = a_4 - \frac{a_2 a_3}{a_1} ; \quad b_3 = a_5 - \frac{a_3^2}{a_1} .$$

Решение уравнения (3) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $\Psi_0^{(n)}(r, t)$ и частного решения неоднородного $-\Psi_4^{(n)}(r, t)$:

$$\Psi_0^{(n)} = C_1^{(n)} I_1(\beta r) + C_2^{(n)} K_1(\beta r) ;$$

$$\Psi_4^{(n)} = K_1(\beta r) \int \frac{1}{W} I_1(\beta r) f^{(n-1)} dr - I_1(\beta r) \int \frac{1}{W} K_1(\beta r) f^{(n-1)} dr .$$

Здесь $I_1(\beta r)$, $K_1(\beta r)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда; $C_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$ – константы интегрирования, причем для сплошных пластин необходимо положить $C_2^{(n)} = 0$, так как функция $K_1(\beta r)$ имеет особенность типа логарифма в начале координат; W – определитель Вронского:

$$W\{I_1(\beta r), K_1(\beta r)\} = K_{1,r} I_1 - I_{1,r} K_1 = -\frac{1}{r} .$$

В итоге решение системы уравнений [2] получаем в виде:

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)} &= C_1^{(n)} I_1(\beta r) + \Psi_4^{(n)} ; \\ w^{(n)} &= \frac{a_1}{a_1 a_5 - a_3^2} \left[\int (L_3^{-1} (q - q_\omega^{(n-1)}) - \frac{a_3}{a_1} L_2^{-1} (p - \right. \\ &\quad \left. - p_\omega^{(n-1)}) \right) dr + (C_4^{(n)} \frac{a_3}{a_1} - C_3^{(n)}) \frac{r^2}{2} - (\frac{a_2 a_3}{a_1} - a_4) \times \\ &\quad \times \left(\frac{C_1^{(n)}}{\beta} I_0(\beta r) + \int \Psi_4^{(n)} dr \right) + C_5^{(n)} \left. \right] ; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1 a_5 - a_3^2} \left[L_3^{-1} (q - q_\omega^{(n-1)}) + (\frac{a_5}{a_3} C_4^{(n)} - C_3^{(n)}) r - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_5}{a_3} L_2^{-1} (p - p_\omega^{(n-1)}) + (a_4 - \frac{a_2 a_5}{a_3}) \Psi^{(n)} \right] . \end{aligned}$$

Здесь L_2^{-1} , L_3^{-1} – интегральные операторы, обратные операторам L_2, L_3 :

$$L_2^{-1}(\varphi) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \varphi dr dr , \quad L_3^{-1}(\varphi) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r \varphi dr dr dr .$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)}$, $C_3^{(n)}$, $C_4^{(n)}$, $C_5^{(n)}$ определяются из граничных условий. Например, в случае $p = \text{const}$, $q = \text{const}$ при жесткой заделке края пластинки и наличии на торце диафрагмы, препятствующей относительно сдвигу слоев, имеем:

$$\begin{aligned}
 C_1^{(n)} &= -\frac{1}{I_1(\beta)} \Psi_q^{(n)} \Big|_{r=1}; \quad C_3^{(n)} = \frac{q}{16} - L_3^{-1} (q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1}; \\
 C_4^{(n)} &= \frac{p}{3} - L_2^{-1} (p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1}; \\
 C_5^{(n)} &= \frac{a_3}{9a_1} p - \frac{q}{64} + \int [L_3^{-1} (q_\omega^{(n-1)}) - \frac{a_3}{a_1} L_2^{-1} (p_\omega^{(n-1)})] dr \Big|_{r=1} \\
 &+ \left(\frac{a_2 a_3}{a_1} - a_4 \right) \int \Psi^{(n)} dr \Big|_{r=1} + \frac{1}{2} (C_3^{(n)} - \frac{a_3}{a_1} C_4^{(n)}).
 \end{aligned} \tag{5}$$

На первом шаге приближения, который соответствует задаче идеальной теории упругости, дополнительные "внешние" нагрузки следует положить равными нулю. В случае $p = 0$ частное решение уравнения (3) можно выписать при этом в конечном виде, т.е.

$$\Psi_q^{(1)} = \frac{b_2 q}{2cG_2 b_3} r.$$

Это позволяет получить точное решение задачи теории упругости, положив в (4), (5) $n = 1$:

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \frac{b_2 q}{2cG_2 b_3} \left[\frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)} - r \right]; \\
 u &= \frac{a_3 q}{2(a_1 a_5 - a_3^2)} \left[\frac{1}{8} r (r^2 - 1) - \frac{b^2 (a_2 a_5 - a_3 a_4)}{cG_2 a_3 b_3} \left(\frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)} - r \right) \right]; \\
 w &= \frac{a_1 q}{4(a_1 a_5 - a_3^2)} \left\{ \frac{(r^2 - 1)^2}{16} - \frac{b_2 (a_2 a_3 - a_1 a_4)}{cG_2 b_3 a_1} \times \right. \\
 &\left. \times \left[\frac{2(I_0(\beta r) - I_0(\beta))}{\beta I_1(\beta)} - (r^2 - 1) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

При шарнирном опирании изменится только выражение для прогиба, к которому добавится член

Т а б л и ц а 1. Постоянные значения и другие механические характеристики мате-

k	A_k	a_k	$\varepsilon_8^{(k)}, \%$	$B_k \times (3600 \text{ с})^{-\delta_k}$	$\gamma_k \times (3600 \text{ с})^{-1}$
1	0,491	2,496	0,18	0,0266	0,05
2	0,898	1,492	3,3	0,0233	1,8

$$\frac{q(r^2 - 1)}{64(a_5 + a_6)(a_5 a_1 - a_3^2)} \left[a_3^2 - a_1 a_5 + \frac{4a_4 a_1 b_2 (a_5 - a_4)}{c G_2 b_3} \left(\frac{\beta I_0(\beta)}{I_1(\beta)} - 2 \right) \right],$$

где
$$a_6 = \frac{2h^3}{3} (K_1^0 - \frac{2}{3} G_1^0) + c(h^2 + hc + \frac{c^2}{3}) (K_2^0 - \frac{2}{3} G_2^0).$$

3. Численная реализация метода упругих решений на ЭВМ проводилась в соответствии с рекуррентными формулами (4), (5). Необходимые данные по деформативным свойствам материалов слоев заимствованы из известных экспериментальных исследований дюралюминия [5] и политетрафторэтилена [6]. Аппроксимация универсальных функций нелинейности и пластичности проводилась в соответствии с формулами

$$\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}) = \begin{cases} A_k \left(1 - \frac{\varepsilon_s^{(k)}}{\varepsilon_u^{(k)}}\right) a_k, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_s^{(k)} \\ 0 & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_s^{(k)} \end{cases} \quad (6)$$

Ядра сдвиговой и объемной релаксации принимались в виде [7]:

$$R_k(t) = B_k e^{-\gamma_k t} t^{\delta_k - 1}; \quad V_2(t) = V_2 e^{-\gamma t} t^{\delta - 1} \quad (7)$$

Этот выбор обусловлен аналитической простотой формул и способностью достаточно полно учесть физически нелинейные свойства материалов и слабо-сингулярность их ядер релаксации. Константы, входящие в выражения (6), (7), и другие механические характеристики материалов приведены в табл. 1.

Нагрузка $q = 1,5 \cdot 10^7$, $p = 0$; время ее действия $t_0 = 59$ мин и относительные толщины слоев $h = 0,05$, $c = 0,15$ подбирались таким образом, чтобы нелинейные и реономные свойства материалов проявились в достаточной степени.

Численный счет показал практическую сходимость метода упругих решений. Максимальное отклонение 4-го приближения решения от 3-го не превышает 4%, а от 5-го, которое принято за искомого, — 1,5%. Для исследования точности и достоверности численных результатов было проверено выполнение уравнений равновесия — погрешность не превысила 4%. Исходя из условия независимости решения от шага сеток и минимальности времени работы ЭВМ

риалов

δ_k	$B_k (3600 \text{ с})^{-\delta}$	$\gamma_k (3600 \text{ с})^{-1}$	δ	$G_k^0 \cdot 10^{-10}, \text{ Па}$	$K_k^0 \cdot 10^{-10}, \text{ Па}$
0,5	—	—	—	3,15	6,448
0,025	0,0288	1,8	0,05	0,035	1,02

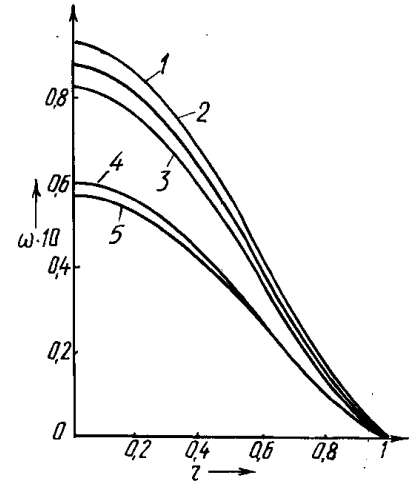


Рис. 1. Составляющие полного расчетного прогиба круглой двухслойной пластинки: 1 — оба слоя идеально упругие; 2 — металл — упругопластический, полимер — нелинейно-упругий; 3 — металл — упругий, полимер — линейно-вязкоупругий; 4 — металл — вязкоупругопластический, полимер — линейно-вязкоупругий; 5 — общий случай физических уравнений состояния ($t = t_0$)

ЕС-1022 число узлов по радиусу принималось 16, по времени — 60. Граничные условия в соответствии с методом выполняются точно.

Влияние вязкоупругопластических свойств металлов и нелинейно вязкоупругих свойств полимеров на расчетный прогиб пластинки иллюстрирует рис. 1. Как показал численный счет, большими из напряжений являются радиальные, которые достигают максимума в заделке. Соответствующие графики приведены на рис. 2. Там же показано положение в пластинке нейтральной поверхности, т.е. поверхности, радиальные перемещения которой равны нулю. На рис. 3 приведены напряжения на поверхности слоев склейки, учет которых необходим при определении условия расслоения материалов. Рис. 4 содержит информацию о распределении и росте со временем в поперечном сечении пластинки областей пластических деформаций и зон физической нелинейности. Интенсивность деформаций при этом в несущем слое достигла 3,5%, в полимерном — 6,1%. Соответствующие функции нелинейности принимали максимальные значения: $\omega_1 = 0,431$; $\omega_2 = 286$.

Анализируя представленные аналитические, численные и графические результаты, можно сделать следующие выводы.

1. При расчете двухслойных металлополимерных пластин, предназначенных для работы в диапазоне нагрузок, достаточных для проявления вязкоуп-

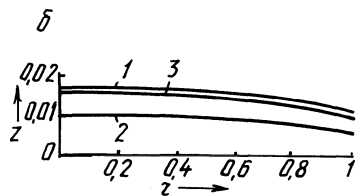
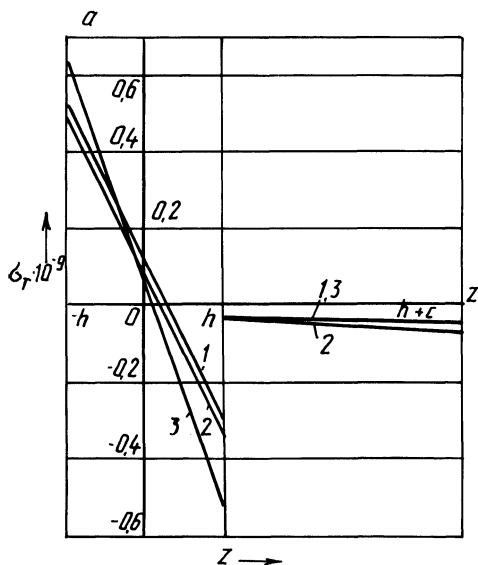


Рис. 2. Изменение радиальных напряжений σ_r по толщине пластинки на ее краю (а) и положение нейтральной поверхности в пластинке (б):
 1 – слой идеально упругие; 2,3 – общий случай физических уравнений состояния при $t = 0$ и $t = t_0$ соответственно

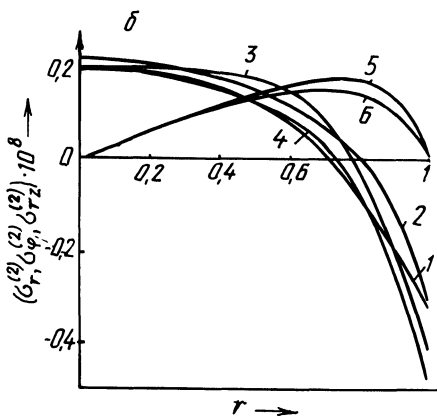
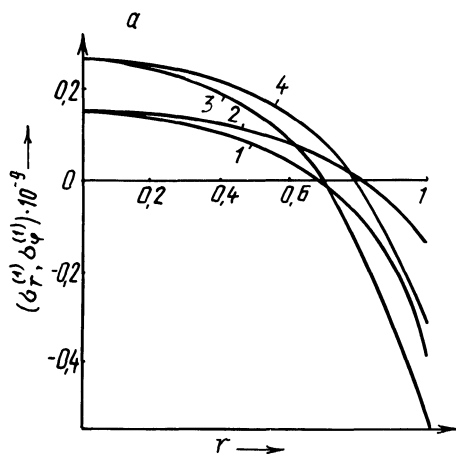


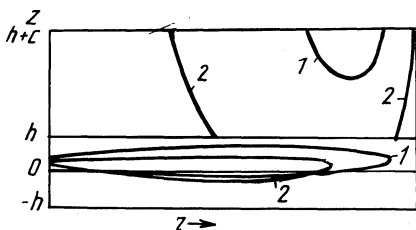
Рис. 3. Напряжения на поверхностях слоев в склейке:

а – металлического, б – полимерного: 1 – σ_r , 2 – σ_φ , 5 – σ_{rz} в случае идеально упругих слоев; 3 – σ_r , 4 – σ_φ , 6 – σ_{rz} в общем случае физических уравнений состояния при $t = t_0$

ругопластических и нелинейно-вязкоупругих свойств материалов, учет последних при определении НДС является необходимым.

2. Для решения соответствующих краевых задач рекомендуется метод упругих решений А.А. Ильюшина, применение которого в задаче о круглой пластинке показало быструю его сходимость и высокую для инженерной практики точность.

Рис. 4. Распределение по поперечному сечению пластинки областей пластических деформаций в металлическом слое и зон физической нелинейности в полимерном слое: 1 — при $t = 0$; 2 — при $t = t_0$ (в полимере — внутри кривых, в металле — снаружи)



3. При расчетах круглых многослойных пластин точное решение задачи теории упругости может быть получено по аналогии.

ЛИТЕРАТУРА

1. И л ь ю ш и н А.А. Пластичность — М.: Гостехиздат, 1948. — 376 с.
2. М о с к в и т и н В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. — М.: Наука, 1972. — 327 с.
3. С т а р о в о й т о в Э.И. О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек. — Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1980, № 2, с. 92–96.
4. Г р и г о л ю к Э.И., Ч у л к о в П.П. Нелинейные уравнения пологих многослойных оболочек регулярного строения. — МТТ, 1967, № 1, с. 163–169.
5. Н а м е с т н и к о в В.С., Х в о с т у н к о в А.А. Ползучесть дуралюминия при постоянных и переменных нагрузках. — ПМТФ, 1960, № 4, с. 90–95.
6. Г о л ь д м а н А.Я. Прочность конструкционных пластмасс. — Л.: Машиностроение, 1979. — 320 с.
7. Р ж а н и ц ы н А.Р. Теория ползучести. — М.: Стройиздат, 1968. — 416 с.

УДК 539.3

Н.П. КАРЕТКО, канд. физ.-мат. наук (БГУ)

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ

При исследовании на термпрочность пластинчатых элементов конструкции, работающих в условиях нестационарных тепловых режимов (жидкостная закалка, сварка и др.), возникает необходимость в определении температурных напряжений в пластинках с учетом теплообмена. Такие задачи для случаев, когда на контуре заданы напряжения или перемещения, достаточно полно исследованы в работе [1] и других работах, где использованы аналогичные методы расчета.

Известный интерес представляют смешанные нестационарные задачи термоупругости, когда на одних участках контура заданы перемещения, а на остальных — напряжения.

В данной работе дано решение смешанной квазистатической задачи термоупругости для полубесконечной пластинки, нагреваемой движущимся источником тепла.

Считая, что однородная изотропная полубесконечная пластинка находится в обобщенном плоском термонапряженном состоянии и ее срединная плоскость занимает область D^- ($y < 0$), получаем формулы [2]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}] + a_1 T; \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \Phi'(z) + \Psi_0; \quad (2)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = \alpha \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \Phi'(z) - \Psi_0; \quad (3)$$

$$2\mu (u + iv) = \alpha \varphi(z) + \varphi(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi(z)} - \psi_0; \quad (4)$$

$$X + iY = -i[\varphi(z) - \varphi(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi(z)} + \psi_0]_A^B; \quad (5)$$

$$M = \operatorname{Re} [\chi(z) - z \psi(z) - z\bar{z}\Phi(z) + U_0 - x \frac{\partial U_0}{\partial x} - y \frac{\partial U_0}{\partial y}]_A^B; \quad (6)$$

$$\psi_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \quad \psi_0 = 2 \frac{\partial U_0}{\partial \bar{z}}, \quad \tau = \frac{kt}{c\rho}, \quad a_1 = a_0 E, \quad (7)$$

где T – температура, усредненная по толщине пластинки и удовлетворяющая уравнению

$$\Delta T - \alpha_1^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau} - F; \quad (8)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \alpha_1^2 = \frac{\beta}{k\delta_0}, \quad F = \alpha_1^2 T_c(x, y, \tau) + \frac{Q(x, y, \tau)}{k},$$

где β – коэффициент теплоотдачи; $Q(x, y, \tau)$ – усредненная по толщине плотность источников тепла; $T_c(x, y, \tau)$ – температура внешней среды, омывающей боковые поверхности пластинки; U_0 – частное решение уравнения

$$\Delta U_0 = a_1 T.$$

Остальные коэффициенты общеизвестны [3, 4].

Потребуем, чтобы напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} равнялись нулю на бесконечности. Тогда на основании формул (1)–(8) получаем, что для больших $|z|$ функции $\Phi(z)$, Ψ_0 имеют вид:

$$\Phi(z) = \Gamma^I + \frac{\gamma_1^I}{z} + \frac{\gamma_2^I}{z^2} + 0 \left(\frac{1}{z^3} \right), \quad z \in D^-; \quad (9)$$

$$\Phi(z) = \Gamma^{\parallel} + \frac{\gamma_1^{\parallel}}{z} + \frac{\gamma_2^{\parallel}}{z^2} + 0 \left(\frac{1}{z^3} \right), \quad z \in D^+; \quad (10)$$

$$\Psi_0 = \Gamma_0 + \frac{d_1^I}{z} + \frac{d_1^{\parallel}}{\bar{z}} + \frac{d_2^I}{z^2} + \frac{d_2^{\parallel}}{\bar{z}^2} + 0 \left(\frac{1}{|z|^3} \right); \quad (11)$$

$$\Gamma^I = B^I + iC^I; \quad \Gamma^{\parallel} = B^{\parallel} + iC^{\parallel}, \quad C^I = \frac{2\mu\epsilon_{\infty}}{1+\alpha}; \quad B^I = -\frac{a_1 T_{\infty}}{4}; \quad (12)$$