УДК 539.3

М.Д. МАРТЫНЕНКО, д-р физ.-мат.наук,
Е.А. СВИРСКИЙ, А.А. ДАШКЕВИЧ (БГУ)

ИЗГИБ БАЛОК И ПЛИТ НА КВАЗИУПРУГОМ ОСНОВАНИИ В ОДНОЙ УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Рассматривается задача изгиба полосы под действием распределенной нагрузки на неоднородном основании, модуль упругости которого меняется по глубине по закону $E_\nu = E_0 z^\nu$. Предполагается, что полоса деформируется по толщине под действием внешней нагрузки и реакции отпора основания. Найдены реактивное давление под подошвой полосы, изгибающий момент в полосе от действия внешней нагрузки и реакции отпора.

Пусть бесконечная полоса шириной 2a и высотой 2h изгибается на квазиупругом основании распределенной нагрузкой $q(x)$. Предполагается, что края полосы свободны. Смятие полосы (суммарное перемещение точек полосы по толщине) определяется по формуле [1, 2]:

$$w_{см} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)h}{E(1-\mu)} [q(x) + p(x)],$$

где μ, E – коэффициенты Пуассона и модуль Юнга.

Перемещения оси балки (срединной поверхности полосы) определяются из дифференциального уравнения

$$\frac{D}{a^4} \frac{d^4 w_п}{dx^4} = q(x) - p(x) \tag{1}$$

и граничных условий

$$w_п^{II}/_{x=\pm 1} = w_п^{III}/_{x=\pm 1} = 0. \tag{2}$$

Обращая (1) – (2) с помощью функции Грина, получим для перемещений оси балки следующее выражение:

$$w_п(x) = \frac{a^4}{12D} \int_{-1}^{1} |x-t|^3 [q(t) - p(t)]\, dt + C_0 + C_1 x. \tag{3}$$

С другой стороны, перемещения срединной плоскости полосы состоят из перемещения границы основания и половины смятия [1, 2]

$$w_п = w_0 + \frac{1}{2} w_{см}.$$

Пользуясь выражением для w_0, полученным в [3], [4], имеем

$$w_п = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)h}{2E(1-\mu)} [q(x) + p(x)] + \frac{\theta_\nu a^{\nu+1}}{\nu} \int_{-1}^{1} \frac{p(t)\,dt}{|x-t|^\nu}, \tag{4}$$

где $\theta_\nu = \dfrac{(1-\mu^2) C^*_\nu \, \gamma \sin \frac{\pi}{2}\gamma}{E_0 (1+\nu)}$; $\dfrac{\gamma^2}{1+\nu} = 1 - \dfrac{\nu\mu}{1-\mu}$;

$$\pi \Gamma(2+\nu) C^*_\nu = 2^{1+\nu} \Gamma\left(1 + \frac{1+\nu-\gamma}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1+\nu+\gamma}{2}\right).$$

Вносся (4) в (3), получим после некоторых преобразований следующее интегральное уравнение II рода с малым параметром при внеинтегральном члене:

$$\alpha p(x) + \int_{-1}^{1} K(x,t) p(t)\, dt = f(x), \tag{5}$$

где $K(x,t) = \dfrac{2E(1-\mu)\, a^\nu \theta_\nu}{(1+\mu)(1-2\mu)\nu} \; \dfrac{1}{|x-t|^\nu} + \beta |x-t|^3$;

$$f(x) = -\frac{h}{a} q(x) + \beta \int_{-1}^{1} |x-t|^3 q(t)\, dt + C_0 + C_1 x;$$

$$\alpha = \frac{h}{a}\ ; \ \beta = \frac{a^3 (1-\mu)^2}{4h^3 (1-2\mu)}.$$

Постоянные C_0 и C_1 определяются из условия равновесия полосы

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} p(x)\, dx = \int_{-1}^{1} q(x)\, dx\ ; \\ \int_{-1}^{1} x p(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x q(x)\, dx\, . \end{cases} \tag{6}$$

Решение уравнения (5) ищется в виде

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k(x), \tag{7}$$

где $\varphi_k(x)$ – δ-образные функции. В данном случае в качестве $\varphi_k(x)$ взяты следующие функции:

$$\varphi_\kappa(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{\kappa-1}}{h_\kappa}\ ; & x_{\kappa-1} \leqslant x \leqslant x_\kappa\ ; \\ \dfrac{x_{\kappa+1} - x}{h_\kappa}\ ; & x_\kappa \leqslant x \leqslant x_{\kappa+1}\ ; \\ 0\ ; & x < x_{\kappa-1},\ x_{\kappa+1} < x\ ;\ h_\kappa = x_\kappa - x_{\kappa-1}\, . \end{cases}$$

Внося (7) в (5) и (6) и пользуясь методом коллокаций, получим систему $n + 2$ алгебраических уравнений от $n + 2$ неизвестных $d_1, \ldots, d_n, C_0, C_1$. Полученная система уравнений решается численными методами на ЭВМ.

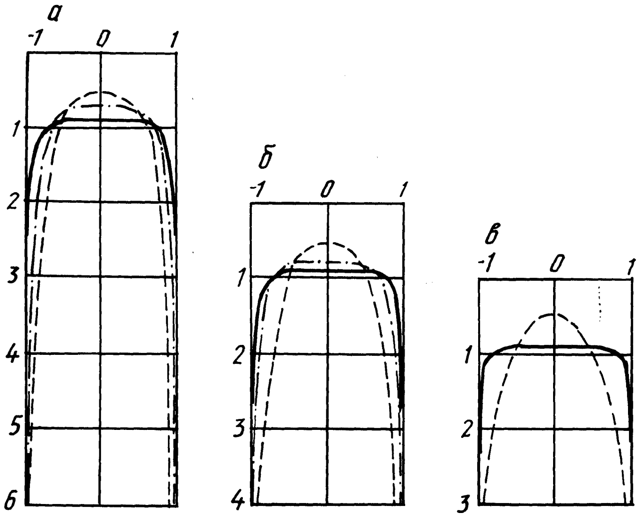

Рис. 1. Реактивное давление при:
а – $\nu = 0{,}1$; б – $\nu = 0{,}5$; в – $\nu = 0{,}9$

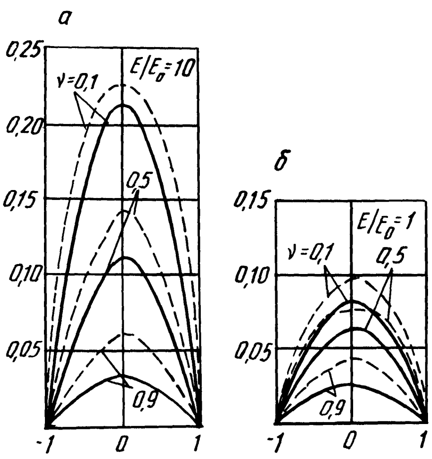

Рис. 2. Изгибающие моменты при $E/E_0 = 1{,}0$

Изгибающие моменты в любом сечении полосы определяются по известному реактивному давлению и внешней нагрузке формулой

$$M_x = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}(x-t)\,[q(t) - p(t)]\,dt - \frac{1}{2}\int_{-x}^{1}(t-x)\,[q(t) - p(t)]\,dt.$$

На рис. 1 представлены графики расчета реактивных давлений при разных значениях ν. Штриховые линии соответствуют поведению реактивного давления под подошвой изгибаемой полосы без учета смятия. Сплошные – реактивному давлению с учетом смятия при соотношении модулей упругости полосы и основания, равном единице ($E/E_0 = 1$). Штрихпунктирные линии – реактивному давлению при $E/E_0 = 10$.

На рис. 2 представлены графики изгибающих моментов при разных значениях ν. Сплошные линии соответствуют изгибу с учетом смятия, штриховые – без учета смятия. При всех расчетах внешняя нагрузка взята единичной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко М.Д., Свирский Е.А. Изгиб балки на нелинейной полуплоскости с учетом смятия ее по толщине. – Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат.навук, 1982, №4, с. 33–38. 2. Свирский Е.А. О линейной задаче Проктора. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1983, вып. 10, с. 62–65. 3. Ростовцев Н.А. Об одном интегральном уравнении, встречающемся в задаче о давлении жесткого фундамента на неоднородный грунт. – ПММ, 1961, т. 25, вып. 1, с. 3–11. 4. Попов Г.Я. Математические проблемы контактных задач. – Одесса: ОГУ, 1976. – 115 с.

УДК 624.072.4

А.Е. КРУШЕВСКИЙ, канд.техн.наук,
А.А. ФЕДУТА (БПИ)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОВМЕСТНОМ КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ ИЗ ПЛОСКОСТИ КРИВИЗНЫ БРУСА С КРУГОВОЙ ОСЬЮ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

На основе методов аналитической механики (вариационного принципа Лагранжа) дается решение задачи о кручении и изгибе из плоскости кривизны бруса прямоугольного поперечного сечения с круговой осью, на торцах которого действуют крутящие и изгибающие моменты (рис. 1).

В работе [1] развивается метод приближенного интегрирования уравнений равновесия и совместности деформаций путем разложения членов уравнения и компонентов тензора напряжений в степенные ряды по малому параметру, роль которого выполняет отношение высоты сечения к радиусу кривизны. Автор работы [1] строит теорию кручения и изгиба стержней малой кривизны с круговой осью. При этом результаты получаются тем точнее, чем больше радиус кривизны. При таком подходе к решению задачи выполняются точно только краевые условия на контуре прямоугольного сечения, уравнения же равновесия внутри тела и уравнения неразрывности деформации, а также закон Гука выполняются приближенно.

В работе [3] на основе вариационного уравнения равновесия элементарного слоя получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для кругового бруса, нагруженного силами собственного веса. При этом уравнения равновесия внутри и на поверхности тела удовлетворяются в интегральном смысле.

В предлагаемом авторами методе перемещений на основе вариационного принципа Лагранжа строится теория кручения и изгиба стержней прямоугольного поперечного сечения с круговой осью любого радиуса кривизны при точном выполнении краевых условий на контуре, точном выполнении уравнений неразрывности и закона Гука и при приближенном выполнении лишь уравнений Коши (равновесия внутри).