

В рассматриваемой задаче может представить практический интерес уменьшение высоты параллелепипеда под действием нагрузки

$$\Delta H = \int_0^H dz \int_0^{\infty} f(P_{zz} t) dt .$$

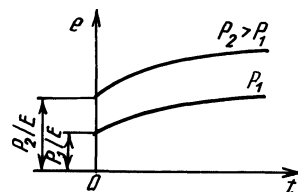


Рис. 2. Вид кривой ползучести для вязкоупругого тела

У всех материалов кривая ползучести имеет свойство

$$\frac{de}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0 .$$

Поэтому несобственный интеграл всегда сходится.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
2. Ф и л о н е н к о-Б о р о д и ч М.М. Теория упругости. — М.: Физматгиз, 1959. — 364 с.

УДК 624.074.4.042.8

Д.В. СЕЙФЕР (ГПИ),  
Г.Ф. ЕРШОВ, д-р техн.наук (БПИ),  
Э.Г. КОСЫХ, канд.техн.наук (ГПИ)

### К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

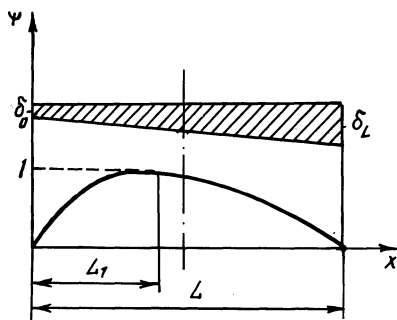
Цилиндрические оболочки переменной толщины находят широкое распространение в технике. Это связано с тем, что небольшие локальные изменения толщины намного повышают прочность конструкции и эффективность ее использования. При решении задач динамической прочности такого рода оболочек прежде всего возникает вопрос определения частот свободных колебаний. В настоящее время насчитывается много работ, посвященных исследованию колебаний цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины. Большинство авторов изучали осесимметрические колебания таких оболочек приближенными методами.

В данной статье предлагается точный метод решения задачи осесимметрических колебаний цилиндрических круговых оболочек переменной толщины (рис. 1).

Рассматривается тонкая круговая цилиндрическая оболочка длиной  $L$ , радиусом  $R$  и толщиной, изменяющейся вдоль образующей по произвольному закону

$$\delta(x) = \delta_0 (1 + ax)^k, \quad (1)$$

где  $\delta_0$  — толщина оболочки при  $x = 0$ ;  $a$  — безразмерный параметр изменчивости толщины.



На основе полубезмоментной теории тонких оболочек, с использованием гипотез о нерастяжимости контура поперечного сечения и об отсутствии сдвигов срединной поверхности, вариационным методом в [1] выведено разрешающее уравнение осесимметрических колебаний оболочки переменной толщины:

Рис. 1. Зависимость формы выпучивания от толщины оболочки

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x) \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2}] - \left[ \frac{\omega^2 \rho}{g} - \frac{E}{R^2} \right] \delta(x) \psi(x) = 0. \quad (2)$$

где  $\psi(x)$  — функция радиальных перемещений;  $\rho$  — плотность материала;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $E$  — модуль Юнга;  $\omega^2$  — квадрат круговой частоты собственных колебаний.

Вводя безразмерный параметр  $x = x/L$  и новую переменную  $t = 1 + xL$ , после подстановки в (2) получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами и регулярной особенностью в начальной точке:

$$t^4 \frac{d^4 \psi}{dt^4} + A_0 t^3 \frac{d^3 \psi}{dt^3} + A_1 t^2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} - P_\omega t^{4-2k} \psi = 0, \quad (3)$$

где  $P_\omega = \left( \frac{\omega^2 \rho}{g} - \frac{E}{R^2} \right) \frac{\delta_0 L^4}{D_0 a^4}$  — частотный параметр;

$$A_0 = 6k; \quad A_1 = 3k(3k - 1).$$

Согласно теореме Фукса уравнение (3) имеет общее решение в виде линейной комбинации сходящихся рядов, имеющих особенность в начале координат.

Следуя процедуре метода Фробениуса, решение уравнения (3) ищем в виде обобщенного степенного ряда

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^{y+n} \quad (4)$$

где показатель  $y$  и коэффициенты  $A_n$  пока неизвестны. Подставляя (4) в (3) и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях  $t$ , получим уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_n f_0(y+n) + A_{n-4+2k} f_{4-2k}(y+n-4+2k)] t^{y+n} = 0, \quad (5)$$

где

$$f_0(y+n) = (y+n)(y+n-1)(y+n-2)(y+n-3) + 6k(y+n)(y+n-1)(y+n-2) + 3k(3k-1)(y+n-1);$$

$$f_{4-2k} = P_{\omega}.$$

Определяющее уравнение, из которого можно найти показатели  $y$ , имеет вид

$$f_0(y) = y(y-1)(y-2)(y-3) + 6ky(y-1)(y-2) + 3k(3k-1) \times \\ \times (y-1) = 0, \quad (6)$$

корнями этого уравнения являются

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 3 - 3k, y_4 = 2 - 3k. \quad (7)$$

Из анализа корней определяющего уравнения (6) следует, что изменение толщины оболочки по нелинейному закону ( $k \neq 1$ ) интегралами уравнения (3) будут функции

$$\psi = \sum_{j=1}^n C_j t^{y_j} {}_0F_3 \left[ \frac{y_j - y_i}{4 - 2k} + 1; \frac{P_{\omega} t^{4-2k}}{(4-2k)^4} \right], \quad (8)$$

где  $j \neq i$ ,  $C_j$  — постоянные, зависящие от граничных условий;

$$t_0^{y_j} {}_0F_3 \left[ \frac{y_j - y_i}{4 - 2k} + 1; \frac{P_{\omega} t^{4-2k}}{(4-2k)^4} \right] - \text{гипергеометрическая функция.}$$

В случае линейного закона изменения толщины оболочки ( $k = 1$ ) получаем второе частное решение уравнения (3) в обобщенных гипергеометрических функциях вида  ${}_0F_3$  (логарифмическое решение).

В качестве примера рассмотрена оболочка со свободно опертыми краями. Граничные условия имеют вид

$$\psi|_{x=0,L} = 0; \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} \Big|_{x=0,L} = 0. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9) получаем систему четырех однородных уравнений для неизвестных постоянных  $C_j$ . Эта система имеет нетривиальное решение при равенстве нулю ее определителя. Раскрывая определитель, получаем уравнение, из которого определяем частотный параметр  $P_{\omega}$ .

Полученное значение частотного параметра  $P_{\omega}$  подставляем в (8), что определяет собственную форму колебаний. Осесимметричная форма выпучивания в рассмотренном случае отличается от случая  $\delta = \text{const}$  сдвигом пучности от середины длины оболочки в сторону меньшей толщины, т.е. преобладающими являются смещения в утонченную часть оболочки. Например, на рис. 1 при отношении  $\delta_L/\delta_0 = 2$ ,  $L_1 = 0,487 L$ .

Численные результаты получены с помощью ЭВМ "Минск-32" при использовании алгоритмического языка "ФОРТРАН". Построен график зависимости частотного параметра от показателя степени изменения толщины и величины  $\alpha$  (рис. 2).

Приведенные результаты показывают, что показатель степени изменения толщины оболочки существенно влияет на частотный параметр, а следовательно

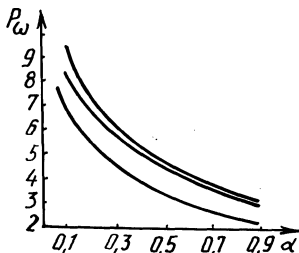


Рис. 2. Зависимость частотного параметра от показателя степени изменения толщины и величины  $\alpha$

но, и на собственную частоту осесимметрических колебаний. Следует отметить, что найденные точные аналитические решения могут быть использованы для оценки эффективности вариационных, численных и других приближенных методов определения спектра частот колебаний оболочки переменной толщины при любых граничных условиях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. — М.: Машиностроение, 1966, с. 416—420.
2. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1968, с. 178.
3. Косых Э.Г., Сейфер Д.В. Свободные колебания цилиндрических оболочек с линейным утолщением. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш.шк., 1975, вып. 1, с. 64—69.

УДК 532.135.537.212

В.М. НОСОВ, канд.техн.наук (БПИ)

#### О РЕОЛОГИИ РАБОЧИХ СРЕД НА ОСНОВЕ АЭРОСИЛА

С точки зрения реологических характеристик до настоящего времени исследованию подвергались в основном суспензии диатомита в трансформаторном масле с активатором водой или диэтиламином [1—3]. Достаточно полный обзор работ по исследованию реоэлектрических преобразователей приведен в [4]. Другие известные в настоящее время слабозлектропроводные электро-реологические малоконцентрированные суспензии на основе аэросила [5], которые обладают значительно большей седиментационной устойчивостью (отсутствием расслоения компонентов в течение длительного времени), изучены еще недостаточно.

Сложность и разнообразие реологических свойств электро-реологических суспензий обусловлены существованием большого числа разнообразных фак-