

Это искомое уравнение движения вязкоупругой среды в квазистатической постановке.

Замечание. Функционалы, фигурирующие в формулах (1) и (2), отличаются от предлагаемых в [1] формулировок вариационного принципа Кастилиано наличием интеграла по t . С их помощью легко сформулировать вариационные уравнения, удобные при численной реализации вариационного принципа Кастилиано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионов В.И., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. 2-е изд. — М.: Высш.шк., 1979, ч.1. — 384 с. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Минск: Наука и техника, 1967. — 227 с. 3. Пратуевич Я.А. Вариационные методы в строительной механике. — М.—Л.: Огиз, Гостехиздат, 1948. — 400 с.

УДК 539.37

А.Х. КИМ, д-р техн.наук,
Г.С. СОКОЛОВСКИЙ (БПИ)

К ЗАДАЧЕ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Допустим, что на верхнюю грань прямоугольного параллелепипеда действует сжимающая нагрузка $P_{zz} = f(x, y)$ (рис. 1). Решение этой задачи, точно удовлетворяющее условию на верхней грани, может быть получено. Но при этом не удовлетворяются условия на боковых гранях, на которых касательные и нормальные напряжения равны 0.

Точное решение этой задачи практически не представляется возможным. Но можно получить приближенное решение, если в исходных уравнениях в соответствии с физическим смыслом задачи сделать некоторые допущения. Допущением для таких материалов, как сталь, может быть, например малость объемной деформации. Если стальной кубик подвергнуть со всех сторон сжатию, то он сжимается и уплотняется. Опыты показывают, что объемное сжатие в особенности при небольших нагрузках очень мало и им можно пренебречь.

Если U_x, U_y, U_z — линейные перемещения по направляющим соответствующих осей, то объемная деформация

$$\theta = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \approx 0.$$

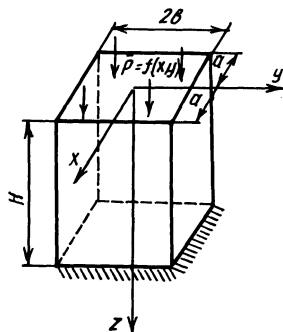


Рис. 1. Схема действия нагрузки на прямоугольный параллелепипед

В этом заключается приближенность приводимого в работе решения данной задачи в упругой постановке.

Известно, что перемещения U_x, U_y, U_z должны удовлетворять уравнениям Ламе [1]:

$$\nabla U_i + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \text{ где } U_1 = U_x, U_2 = U_y, U_3 = U_z, \\ x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z.$$

∇ – оператор Лапласа.

Если мы положим $\theta = 0$, то все линейные перемещения должны быть гармоническими функциями.

По этой причине и все линейные компоненты напряжения также являются гармоническими функциями [2] $P_{ii} = \lambda \theta + 2\mu \partial U_i / \partial x_i$; при $\theta \equiv 0$ $P_{ii} = 2\mu \partial U_i / \partial x_i$; $P_{ki} = \mu (\partial U_i / \partial x_k + \partial U_k / \partial x_i)$.

Допустим, что в результате решения первоначально поставленной задачи, в точности удовлетворяющего условию на верхней грани, получились на боковых гранях нормальные и касательные напряжения в виде некоторых функций от координат.

Предположим, что

$$P_{xx} / x \approx a = \varphi_1(y, z); P_{xx} / x \approx -a = \varphi_2(y, z).$$

Теперь решим такую задачу. Допустим, что на боковых гранях при $x = a$ и $x = -a$ приложены нормальные нагрузки, по модулю равные $\varphi_1(y, z)$ и $\varphi_2(y, z)$, но противоположные по знаку.

Найдем напряжения внутри поля от такой нагрузки, т.е. $\overline{P_{xx}}$. Эта задача сводится к задаче Дирихле.

Дано значение гармонической функции на поверхности, найдем значение функции в любой точке внутри области.

Если M_0 точка внутри области, то

$$\overline{P_{xx}}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \overline{P_{xx}}(M) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{r} - G_1(MM_0) \right] ds, \quad (1)$$

где $\overline{P_{xx}}(M_0)$ – значение $\overline{P_{xx}}$ в точке M_0 ; $\overline{P_{xx}}(M)$ – значение $\overline{P_{xx}}$ в точке M на поверхности; $\frac{1}{r} - G_1(MM_0) = G(MM_0)$ есть функция Грина.

Функция Грина должна удовлетворять следующим условиям.

1. Она должна быть гармонической внутри области, кроме точки M_0 , где она обращается в бесконечность.
2. Она должна равняться нулю на поверхности, т.е. в точке M .
3. $G_1(MM_0) - \frac{1}{r}$ должна быть конечной в точке M_0 .

Представим функцию Грина в следующем виде:

$$G(MM_0) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_M} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{x - x_0}{x_M - x_0} \right) \right] \cos \left[2\pi \left(\frac{y - y_0}{y_0 - y_M} \right) \right] \times$$

$$x e \sqrt{\frac{\pi^2}{4(x_M - x_0)^2} + \frac{\pi^2}{(y_0 - y_M)^2}} (z - z_M)$$

Если вместо функции Грина подставить в (1) это значение, то можем найти напряжение $\overline{P_{xx}}$ в любой точке внутри области.

Тогда действительное напряжение $[P_{xx}(M_0)]$ в любой точке M_0 внутри тела равно

$$[P_{xx}(M_0)] = P_{xx}(M_0) + \overline{P_{xx}}(M_0),$$

где $P_{xx}(M_0)$ напряжение P_{xx} в точке M_0 , полученное в результате решения первоначально поставленной задачи. $[P_{xx}(M_0)]$ есть напряжение в точке M_0 при заданной нагрузке на верхней грани параллелепипеда, но когда отсутствует на боковых гранях P_{xx} .

Точно таким же путем найдем

$$[P_{yy}(M_0)], [P_{xy}(M_0)], [P_{xz}(M_0)] \text{ и т.д.}$$

При этом функция Грина для всех случаев будет одна и та же.

Таким образом мы получим картину распределения напряжений, когда на верхнюю грань действует заданная нагрузка, а боковые грани свободны.

Полагая, что $\theta \equiv 0$, получим приближенное решение задачи. Определив напряжение во всех точках, нетрудно убедиться, что $\nabla P_{xx} \neq 0$, $\nabla P_{yy} \neq 0$ и т.д. Более точное решение можно получить численным методом с помощью формулы Грина

$$P_{xx}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial P_{xx}}{\partial n} - P_{xx} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right] ds - \\ - \frac{1}{4\pi} \iiint_{(v)} \frac{\nabla P_{xx}}{r} dv.$$

Значение ∇P_{xx} в каждой точке внутри области может быть вычислено и может быть вычислено значение $\partial P_{xx} / \partial n$ в каждой точке поверхности.

Таким образом, численным методом в каждой точке внутри области могут быть более точно найдены напряжения, которые вызовут в теле мгновенную деформацию: $e_{ii} = P_{ii} / E_{ii}$. Но если тело обладает вязкоупругими свойствами, то могут быть деформации, зависящие от времени. Для большинства тел кривая $e = f(P, t)$ имеет вид (рис. 2).

Если эти кривые аппроксимированы какой-нибудь аналитической зависимостью $e = f(P, t)$, то в каждой точке найдем деформацию в виде $e_{ik} = f(P_{ik}, t)$.

Например, для тела Кельвина

$$e_{ik} = 1/\eta \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} P(\tau) d\tau + \frac{P_{ik}}{E_{ik}} e^{-\lambda t}.$$

В рассматриваемой задаче может представить практический интерес уменьшение высоты параллелепипеда под действием нагрузки

$$\Delta H = \int_0^H dz \int_0^{\infty} f(P_{zz} t) dt .$$

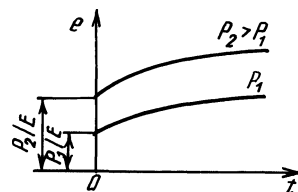


Рис. 2. Вид кривой ползучести для вязкоупругого тела

У всех материалов кривая ползучести имеет свойство

$$\frac{de}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0 .$$

Поэтому несобственный интеграл всегда сходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
2. Ф и л о н е н к о - Б о р о д и ч М.М. Теория упругости. — М.: Физматгиз, 1959. — 364 с.

УДК 624.074.4.042.8

Д.В. СЕЙФЕР (ГПИ),
Г.Ф. ЕРШОВ, д-р техн.наук (БПИ),
Э.Г. КОСЫХ, канд.техн.наук (ГПИ)

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Цилиндрические оболочки переменной толщины находят широкое распространение в технике. Это связано с тем, что небольшие локальные изменения толщины намного повышают прочность конструкции и эффективность ее использования. При решении задач динамической прочности такого рода оболочек прежде всего возникает вопрос определения частот свободных колебаний. В настоящее время насчитывается много работ, посвященных исследованию колебаний цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины. Большинство авторов изучали осесимметрические колебания таких оболочек приближенными методами.

В данной статье предлагается точный метод решения задачи осесимметрических колебаний цилиндрических круговых оболочек переменной толщины (рис. 1).

Рассматривается тонкая круговая цилиндрическая оболочка длиной L , радиусом R и толщиной, изменяющейся вдоль образующей по произвольному закону