где

$$L(x,t)=\begin{cases}\ln \dfrac{\sin 0{,}5\,\pi\,(t+x)}{\sin 0{,}5\,\pi\,(x-t)} & \text{при } t<x\,;\\[2ex] \ln \dfrac{\sin 0{,}5\,\pi\,(t+x)}{\sin 0{,}5\,\pi\,(t-x)} & \text{при } t>x\,.\end{cases}$$

Таким образом, мы видим, что перемещения в задаче упругого равновесия цилиндра записываются в виде неортогональных рядов, коэффициенты в которых вычисляются по формуле (5). В свою очередь, входящая в формулу (5) функция $G(x)$ в случае произвольных граничных условий, является решением интегрального уравнения (6). Лишь в случае согласованных граничных условий, т.е. когда на цилиндрической поверхности $r = R$ заданы радиальные перемещения $U = U^*$ и касательные напряжения $\tau_{rz} = \tau_{rz}^*$, функция $G(x)$ находится в явном виде:

$$G = \frac{\gamma-1}{2}U^* - \frac{1}{2q}\int_0^x \tau_{rz}^* dx + \frac{\gamma-1}{2}V + \frac{3\rho_0 x}{64}\left(\frac{x^2}{3}-1\right).$$

Выражение для ядра интегрального уравнения даже в простейшем частном случае оказывается настолько сложным, что не приводит к возможности непосредственного получения числового результата, в то время как метод нахождения коэффициентов, изложенный в статье [3], [4] приводит к конечному результату при произвольных граничных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Равновесие плиты в точной постановке. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1970, с. 51–57. 2. Бухаринов Г.Н. Исследование по задаче П.Ф. Папковича в случае осесимметричной деформации цилиндра. – В кн.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л.: Судостроение, 1970, с. 27–84. 3. Крушевский А.Е., Акимов В.А. Исследование сходимости рядов перемещений в задаче о равновесии плиты в точной постановке. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1982, вып. 9, с. 26–31. 4. Крушевский А.Е., Акимов В.А. К вопросу об определении коэффициентов неортогональных рядов на примере равновесия жестко защемленной плиты. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1984, вып. 11, с. 48–53.

УДК 539.3

О.Н. СКЛЯР (БПИ)

ВАРИАЦИОННЫЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Основные вариационные принципы механики сплошной среды выводятся независимо от физико-механических свойств этой среды и имеют статико-геометрический характер [1]. С их помощью можно формулировать граничные задачи механики, внося в соответствующую ее вариационную формулировку уравнения состояния среды (связь между напряжениями, деформацией, температурой и т.д.).

При этом для вязкоупругих сред появляются функционалы, содержащие искомые величины, их производные и интегралы от них. Для таких функционалов вывод необходимых условий экстремума приходится проводить по аналогии с выводом классического уравнения Эйлера.

Вариационный принцип минимума дополнительной работы деформации, называемый также вариационным принципом Кастилиано [1, с. 267], имеет вид

$$\delta \int_{-\infty}^{t} \bar{\Phi}\, dv\, dt = \delta \int_{-\infty}^{t}\int_{v} \sum_{ij=1}^{3} \epsilon_{ij}\sigma_{ij}\, dv\, dt = 0 ; \tag{1}$$

$$\delta \left[\int_{-\infty}^{t} \int_{v} \bar{\Phi}\, dv\, dt - \int_{-\infty}^{t} \int_{S_2} \sum_{ij=1}^{3} u_{i,s}\, n_j\, \sigma_{ij}\, dS\, dt \right] = 0, \tag{2}$$

где S_2 – та часть границы S объема v, на которой заданы перемещения.

Ограничимся случаем, когда на S заданы только напряжения (т.е. S_2 – пустое множество).

В этом случае принцип Кастилиано имеет вид (1), в котором нужно конкретизировать зависимость σ_{ij} от ϵ_{ij} и других параметров состояния.

Пусть тело выполнено из материала, который следует такому закону:

$$\sigma_{ij} = \sum_{\kappa\ l=1}^{3} \overset{v}{E}_{ij\kappa l}(x, t)\ \epsilon_{\kappa l}\ (x,t), \tag{3}$$

где $\overset{v}{E}_{ij\kappa l}\ (x,t)\epsilon_{\kappa l}\ (x, t) = E^{0}_{ij\kappa l}\ (x, t)\ \epsilon_{\kappa l}\ (x,t) - \int_{-\infty} R_{ij\kappa l}\ (x,t-\tau) \times$

$\times \epsilon_{\kappa l}\ (\tau)\ d\tau;\ E^{0}_{ij\kappa l} = E^{0}_{ji\kappa l} = E^{0}_{jil\kappa};\ R_{ij\kappa l} = R_{ji\kappa l} = R_{jil\kappa}$

Тогда (1) с учетом (3) принимает вид

$$\delta \int_{-\infty}^{t} \int_{v} \sum_{ij\kappa l=1}^{3} \left[E_{ij\kappa l}\ (x,t)\ \epsilon_{\kappa l}\ (x,t) - \int_{-\infty}^{t} R_{ij\kappa l}\ (x, t-\tau) \times \right.$$

$$\left. \times\, \epsilon_{\kappa l}\ (x, \tau)\ d\tau \right]\ \epsilon_{ij}\ (x, t)\, dv\, dt = 0. \tag{4}$$

Для малых деформаций

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

и поэтому в случае малых деформаций (4) принимает вид

$$\delta \int_{-\infty}^{t} \int_{v} \sum_{ij\kappa l=1}^{3} \left\{ E^{0}_{ij\kappa l} \left(\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_\kappa} \right) - \int_{-\infty}^{t} R_{ij\kappa l}\ (x,t-\tau) \times \right.$$

$$\times\left[\frac{\partial u_к(x,t)}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l(x,\tau)}{\partial x_к}\right]d\tau\Bigg\}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dvdt=0. \qquad (5)$$

В силу симметрии тензоров $E_{ijкl}$ и $R_{ijкl}$ можно записать

$$\sum_{ijкl}^{3} E^0_{ijкl}\left(\frac{\partial u_к}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_к}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=$$

$$=4\sum_{ijкl}^{3} E^0_{ijкl}\frac{\partial u_к}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\quad \sum_{ijкl=1}^{3} R_{ijкl}(x,t-\tau)\left[\frac{\partial u_к(x,\tau)}{\partial x_l}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u_l(x,\tau)}{\partial x_к}\right]\left[\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j(x\,t)}{\partial x_i}\right]=$$

$$=4\sum_{ijкl=1}^{3} R_{ijкl}(x,t-\tau)\frac{\partial u_к(x,\tau)}{\partial x_l}\frac{\partial u_i(x\,t)}{\partial x_j}.$$

Формула (5) принимает вид

$$\delta\int_{-\infty}^{t}\int_{v}\sum_{ijкl=1}^{3}\Bigg\{E^0_{ijкl}(x,t)\frac{\partial u_к(x,t)}{\partial x_l}\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}-$$

$$-\int_{-\infty}^{t} R_{ijкl}(x,t-\tau)\frac{\partial u_к}{\partial x_l}\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}d\tau\Bigg\}dvdt=0.$$

Обозначим через $u^0=\{u^0_1, u^0_2, u^0_3\}$ вектор-функцию, на которой функционал

$$I(t,u)=\int_{-\infty}^{t}\int_{v}\sum_{ijкl=1}^{3}\Bigg\{E^0_{ijкl}(x,t)\frac{\partial u_к(x,t)}{\partial x_l}\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}-$$

$$-\int_{-\infty}^{t} R_{ijкl}(x,t-\tau)\frac{\partial u_к(x,\tau)}{\partial x_l}\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}d\tau\Bigg\}dv\,dt \qquad (6)$$

достигает экстремума. Введем допустимое семейство функций

$$u_{к\alpha}(x,t)=u^0_к(x,t)+\alpha\,\delta\,u_к(x,t),$$

где

$$\delta\,u_к|_S=0,\text{ т.е. } u_{к\alpha}(x,t)|_S=u^0_к(x,t)|_S.$$

Среди множества таких функций (6) становится функцией числового параметра α, которая при $\alpha=0$ достигает минимума.

Поэтому $\left.\dfrac{\partial I(t,u^0+\alpha\delta u)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=0$ или

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{V}\sum_{ijкl}^{3}\Big\{E_{ijкl}^{0}\Big[\frac{\partial u_к^0}{\partial x_l}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}\frac{\partial\delta u_к}{\partial x_l}\Big]-$$

$$-\int_{-\infty}^{t}R_{ijкl}(t-\tau)\Big[\frac{\partial u_к^0(x,\tau)}{\partial x_l}\frac{\partial\delta u_i(x,t)}{\partial x_j}+$$

$$+\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}\frac{\partial\delta u_к(x,\tau)}{\partial x_l}\Big]d\tau\Big\}dv\,dt=0.$$

Проинтегрируем это равенство по частям.
Учитывая, что $\delta u_к|_S=0$ ($к=1,2,3$), получим

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{V}\sum_{ijкl=1}^{3}\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}E_{ijкl}^{0}(x)\frac{\partial u_к}{\partial x_l}\delta u_i+$$

$$+\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}E_{ijкl}^{0}\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}\Big)\delta u_к\Big\}dvdt-\int_{\infty}^{t}\int_{V}\sum_{ijкl=1}^{3}\int_{-\infty}^{t}\Big\{\frac{\partial}{\partial x_j}\times$$

$$\times\Big[R_{ijкl}(x,t-\tau)\frac{\partial u_к^0(x,\tau)}{\partial x_l}\Big]\delta u_i(x,t)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_l}\Big[R_{ijкl}(x,t-\tau)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}\Big]\delta u_к(x,\tau)\Big\}dvdtd\tau=0\,. \qquad (7)$$

Поменяем в (7) порядки интегрирования в третьем слагаемом и сделаем замену t на τ и τ на t.

Тогда видно, что в формуле два последних интеграла объединяются и мы получим

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{V}\sum_{ijкl=1}^{3}\Big\{\frac{\partial}{\partial x_j}E_{ijкl}^{0}(x)\frac{\partial u_к^0(x,t)}{\partial x_l}-$$

$$-\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial x}\Big[R_{ijкl}(x\,t-\tau)\frac{\partial u_к^0(x,\tau)}{\partial x_l}\Big]d\tau\Big\}\delta u_i(x,t)dvdt.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{ijкl=1}^{3}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}E_{ijкl}^{0}(x)\frac{\partial u^0{}_к(x,t)}{\partial x_l}-\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial x_j}[R_{ijкl}(x,t-\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial u_к^0(x,\tau)}{\partial x_l}d\tau\Big]=0\quad(i=1,2,3).$$

Это искомое уравнение движения вязкоупругой среды в квазистатической постановке.

Замечание. Функционалы, фигурирующие в формулах (1) и (2), отличаются от предлагаемых в [1] формулировок вариационного принципа Кастилиано наличием интеграла по t. С их помощью легко сформулировать вариационные уравнения, удобные при численной реализации вариационного принципа Кастилиано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионов В.И., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. 2-е изд. – М.: Высш.шк., 1979, ч.1. – 384 с. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. – Минск: Наука и техника, 1967. – 227 с. 3. Пратусевич Я.А. Вариационные методы в строительной механике. – М.–Л.: Огиз, Гостехиздат, 1948. – 400 с.

УДК 539.37

А.Х. КИМ, д-р техн.наук,
Г.С. СОКОЛОВСКИЙ (БПИ)

К ЗАДАЧЕ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Допустим, что на верхнюю грань прямоугольного параллелепипеда действует сжимающая нагрузка $P_{zz} = f(x, y)$ (рис. 1). Решение этой задачи, точно удовлетворяющее условию на верхней грани, может быть получено. Но при этом не удовлетворяются условия на боковых гранях, на которых касательные и нормальные напряжения равны 0.

Точное решение этой задачи практически не представляется возможным. Но можно получить приближенное решение, если в исходных уравнениях в соответствии с физическим смыслом задачи сделать некоторые допущения. Допущением для таких материалов, как сталь, может быть, например малость объемной деформации. Если стальной кубик подвергнуть со всех сторон сжатию, то он сжимается и уплотняется. Опыты показывают, что объемное сжатие в особенности при небольших нагрузках очень мало и им можно пренебречь.

Если U_x, U_y, U_z – линейные перемещения по направляющим соответствующих осей, то объемная деформация

$$\theta = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \approx 0.$$

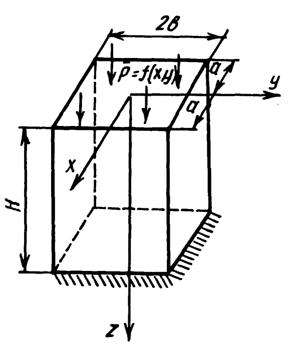

Рис. 1. Схема действия нагрузки на прямоугольный параллелепипед