

названных элементов соответствующие коэффициенты стоимости (для полной длины стержней) равны (в руб.):

$$C_1 = 68,54; C_2 = 34,01; C_3 = 17,16; C_4 = 8,67.$$

Для остальных переменных, входящих в оптимальный план, коэффициенты линейной формы равны нулю. Значение линейной формы — 128,38.

Для этой задачи, так же как и для обычных задач ЛП, можно составить двойственную. Она может быть построена формально:

$$b'W \rightarrow \max, AW \leq C.$$

$W_i$  могут быть и отрицательными. Следствием кусочно-линейной аппроксимации будет то, что соответственно числу векторов, представляющих нелинейную переменную в матрице  $A$ , в запись двойственной задачи будет входить то же число линейных уравнений, и только одно из них может рассматриваться в совокупности с остальными условиями задачи.

В оптимальном плане двойственной задачи  $W^0 = C^0 B^{-1}$  ( $B^{-1}$  — обратная матрица) в соответствии с условиями дополняющей нежесткости в нормальной задаче отличны от нуля переменные, номера которых соответствуют ограничениям на выбор базиса. При этом значения переменных в рассматриваемой постановке будут всегда равны коэффициентам стоимости линейной формы прямой задачи. Все остальные двойственные переменные равны нулю.

На оптимальном плане значения прямой и двойственной целевых функций равны.

$W_i^0$  — мера чувствительности значения линейной формы (стоимости конструкции) к изменению  $i$ -й компоненты вектора ограничений. Чем больше  $W_i^0$  ( $i$  — номер ограничения прямой задачи), тем чувствительнее стоимость конструкции к изменению характеристик соответствующего элемента (в рассмотренном случае — балки).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р ж а н и ц ы н А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. — М.: Стройиздат, 1973. — 239 с.
2. Р о з е н в а с с е р Е.Н., Ю с у п о в Р.М. Чувствительность систем управления. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
3. Б о р и с е в и ч А.А. Поэтапная оптимизация стержневых систем с использованием линейной аппроксимации. — В кн.: Техника, технология, организация и экономика строительства. Минск: Выш. шк., 1980, вып. 6, с. 9—18.

УДК 621.762.045

А.Е. ДРОБЫШЕВСКИЙ, канд.техн.наук (БПИ)

### СВЯЗЬ МЕЖДУ ПЛОТНОСТЬЮ ПРЕССОВОК И УДЕЛЬНЫМ УСИЛИЕМ ПРИ СЖАТИИ ГРАНУЛИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ СО СДВИГОМ

Гранулированные материалы относятся к зернистым средам и поэтому исследование закономерностей их уплотнения при прессовании целесообразно вести с учетом теорий, разработанных для зернистых сред.

Строгое математическое описание закономерностей при деформировании зернистых материалов связано с целым рядом трудностей, обусловленных тем, что зернистая среда представляет собой конгломерат частиц, различных по форме и размерам.

Авторы большинства современных теорий для облегчения задачи предполагают, что зернистый материал может быть представлен с помощью моделей, в которых отдельные зерна заменяются шарами или другими выпуклыми телами, находящимися в соприкосновении в правильных порядках. Одной из первых моделей, учитывающих дискретную природу зернистых сред, была модель из одинаковых шаров плотной упаковки для пространственной задачи и одинаковых цилиндров плотной упаковки для плоской задачи [1].

В настоящей работе исследовалась модель, в которой отдельные гранулы заменены шарами одинакового диаметра, образующими кубическую упаковку, поскольку пористость этой упаковки наиболее близко соответствует пористости гранулированных материалов в состоянии свободной насыпки.

Реальный процесс уплотнения гранул происходит как за счет всестороннего сжатия отдельных частиц, так и за счет сдвиговых деформаций между ними. Влияние сдвиговых деформаций на процесс уплотнения можно установить путем сравнения результатов, полученных из рассмотрения только всестороннего сжатия и сжатия при наличии сдвига.

В работе [2] получено приближенное выражение, связывающее удельное усилие с относительным объемом прессовки при всестороннем сжатии гранулированных материалов:

$$p \approx k(2,1 \beta - 2,5\sqrt{\beta - 1} - 1,4 \ln \sqrt{\beta - 1} - 1,6), \quad (1)$$

где  $k = \sigma_s / \sqrt{3}$  — пластическая постоянная;  $\sigma_s$  — предел текучести при линейном растяжении;  $\beta = \gamma_m / \gamma_{\Pi}$  — относительный объем прессовки;  $\gamma_m$  — плотность монолитного металла;  $\gamma_{\Pi}$  — плотность прессовки.

Излагаемый в данной статье анализ влияния сдвиговых деформаций на процесс уплотнения гранулированных материалов основан на применении метода линий скольжения, развивающихся в поперечном сечении гранул. Подобный подход ранее использовался [3,4] к рассмотрению порошковых материалов.

Рассмотрим плоскую задачу. Заменяем гранулы бесконечно длинными цилиндрами, центры которых образуют квадратную решетку. Полагаем, что материал гранул однороден, каждую гранулу представим жесткопластическим телом, трением на контакте задаемся.

На рис. 1 приведены поля линий скольжения в поперечном сечении элемента гранулированного тела на различных стадиях деформирования для случая, когда касательное напряжение на контактной поверхности  $\tau_k = 0,5 k$ . Угол выхода линий скольжения на контактную поверхность в соответствии с математической теорией пластичности определяется выражением

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos \tau_k / k.$$

Для  $\tau_k = 0,5 k$  угол  $\alpha$  составляет  $30^\circ$ .

Компоненты нормальных напряжений вдоль координатных осей в угловых

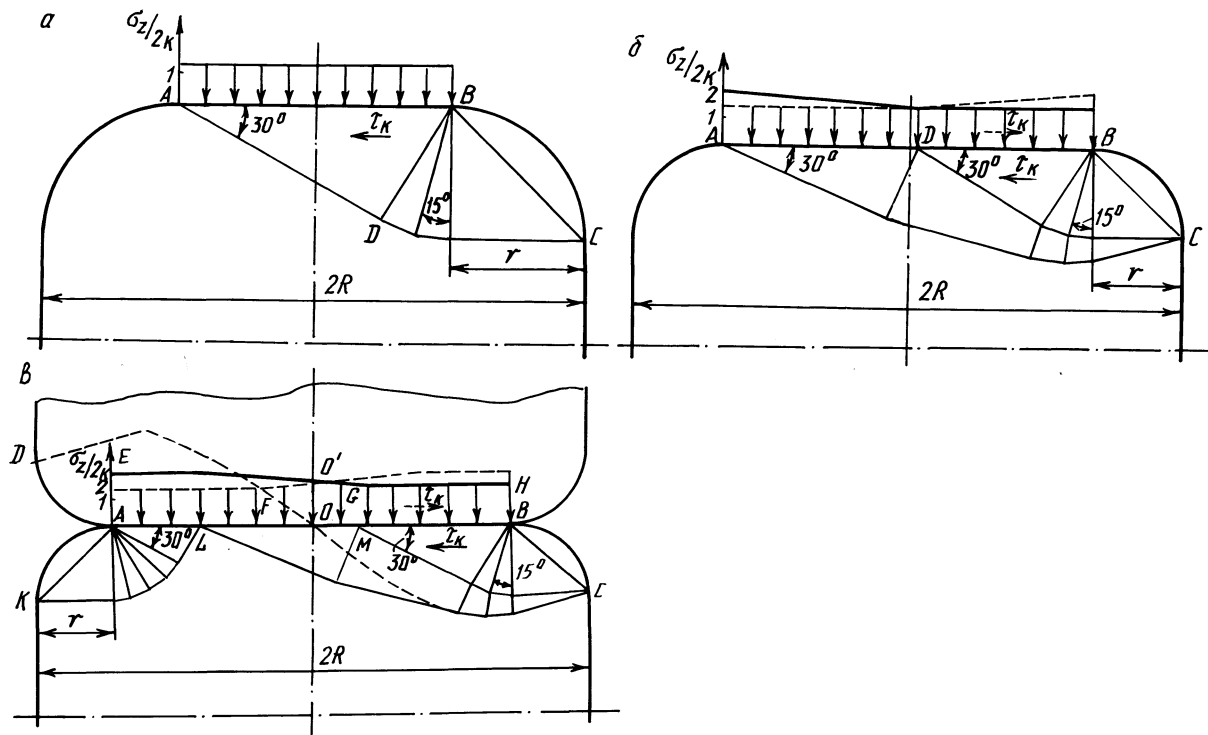


Рис. 1. Поля линий скольжения и эпюры нормальных напряжений на контакте в поперечном сечении элемента гранулированного материала ( $\tau_k = 0,5 \kappa$ )

точках определяли по известным [5,6] соотношениям для плоской деформации.

На начальных стадиях деформирования (рис. 1, а) поле линий скольжения строится из одной особой точки В до тех пор, пока длина контакта АВ не достигнет величины  $2r$ , что вытекает из рассмотрения треугольника АВД. Начальные стадии деформирования характеризуются постоянством нормального напряжения на контакте, равного  $2,9$  к. На более поздних стадиях начинается разворот центрированного веера из точки С, а поле линий скольжения и эпюра нормальных напряжений имеют вид, показанный на рис. 1, б. Значение  $\sigma_z$  в точке А составляет  $3,95$  к. При дальнейшей деформации для одного из двух взаимодействующих элементов поле линий скольжения преобразуется в поле, показанное на рис. 1, в. Оно получено построением полей линий скольжения из двух углов элемента с последующей их стыковкой в точке равного нормального давления на контакте, вычисленного по двум полям. Соответствующая эпюра нормальных напряжений на контакте показана сплошной линией. Как видно, нормальные напряжения  $\sigma_z$  на участках ВМ и АЕ имеют постоянные значения и составляют соответственно  $2,9$  к и  $3,95$  к.

Последующее деформирование приводит к дальнейшему развороту центрированных вееров из точек С и К.

Рассмотрим взаимодействие двух элементов при сжатии со сдвигом (рис. 1, в). Так как направления действия сдвигающих напряжений на контактной поверхности каждого из элементов в этом случае противоположны, то поля линий скольжения, одинаковые по своей структуре, располагаются по-разному в соответствии с направлениями сдвига. Пластическая область в нижнем элементе, расположенная справа от вертикальной оси симметрии, ограничивается кривой  $CO_1$  и постепенно переходит в пластическую область, расположенную в левой части верхнего элемента (она ограничена кривой  $O_1D$ ). Тогда результирующая эпюра нормальных напряжений на контакте может быть представлена кривой EFOGH.

На рис. 2 приведены поля линий скольжения и соответствующие им эпюры нормальных напряжений для случая, когда сдвигающие напряжения на контакте достигают  $0,86$  к. Построение этих полей линий скольжения и эпюр нормальных напряжений аналогично изложенному. Угол выхода линий скольжения на контактную поверхность в этом случае составляет  $15^\circ$ .

Построив поля линий скольжения и эпюры нормальных напряжений на контакте для различных этапов деформирования, что соответствует различным значениям  $R/r$ , усилие деформирования определяли как площадь эпюры  $\sigma_z$  для каждой стадии, а удельные усилия находили делением площади эпюры на первоначальный диаметр элемента. Относительный объем прессовки для каждого этапа деформирования вычисляли исходя из значения  $R/r$  согласно [2] по выражению

$$\beta = 1 + 0,274 r^2/R^2.$$

На рис. 3, а приведены найденные таким образом расчетные зависимости удельных усилий деформирования от относительного объема прессовки при плоской деформации. Кривая 2 характеризует изменение  $p$  от  $\beta$  при  $\tau_k = 0,5$  к,

кривая 3 соответствует  $\tau_k = 0,86$  к, кривая 1, полученная при рассмотрении всестороннего сжатия, приведена для сравнения.

Сопоставление полученных зависимостей позволяет выявить тенденцию, заключающуюся в том, что наличие сдвига при сжатии плоской модели грану-

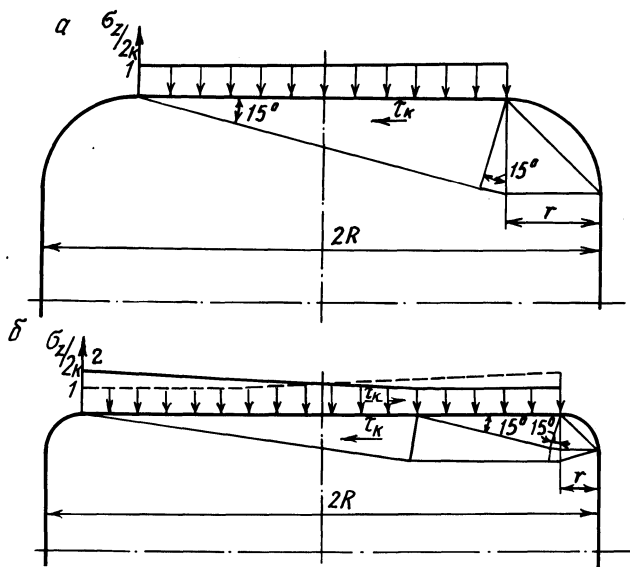


Рис. 2. Поля линий скольжения и эпюры нормальных напряжений на контакте в поперечном сечении элемента гранулированного материала ( $\tau_k = 0,86$  к)

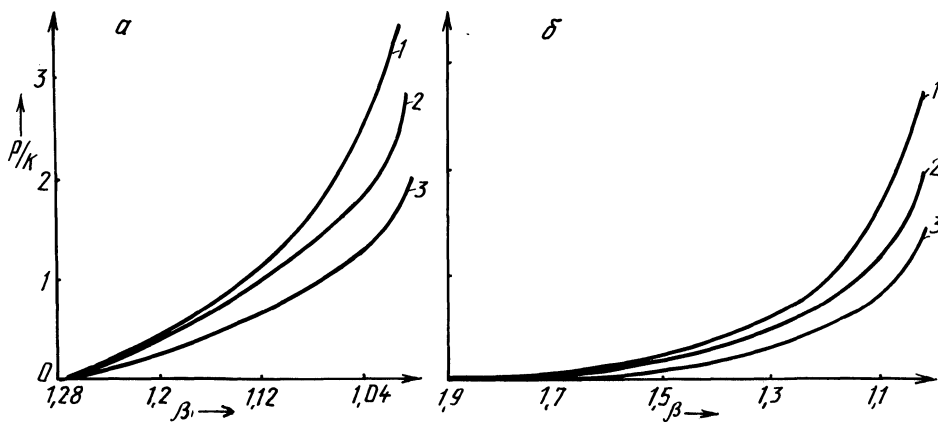


Рис. 3. Расчетные зависимости  $p$  от  $\beta$  при сжатии плоской (а) и объемной (б) моделей гранулированного материала с различными  $\tau_k$ :  
1 -  $\tau_k = 0$ ; 2 - 0,5 к; 3 - 0,86 к

лированного тела снижает необходимое усилие деформирования для достижения определенной плотности прессовок. Это снижение тем больше, чем выше значение сдвигающего напряжения. Для решения объемной задачи воспользуемся эпюрой нормальных напряжений на контакте, полученной из рассмотрения плоской деформации. Предполагая, что распределение  $\sigma_z$  в этом случае будет таким же, как и их распределение при плоской деформации, для различных этапов процесса уплотнения модели гранулированного материала рассчитывали удельные усилия деформирования. Соответствующий этим этапам относительный объем прессовок определяли согласно [2] по выражению

$$\beta = 1 + 0,91 r^2/R^2.$$

Результаты расчетов представлены на рис. 3,б. Нетрудно видеть, что на всех этапах уплотнения модели гранулированного материала необходимые удельные усилия деформирования для достижения определенной плотности прессовок значительно уменьшаются, если сжатие происходит при наличии сдвига. Как и в случае плоской деформации, снижение удельного усилия деформирования тем значительнее, чем выше сдвигающие напряжения. Этот вывод вполне согласуется с наблюдающейся в практике прессования порошковых и гранулированных материалов неоднородностью плотности по объему прессовки. Силы трения о стенки пресс-формы приводят к неравномерному распределению давления по сечению и высоте брикета, что ведет к относительному перемещению частиц. Возникающие при этом сдвиговые деформации частиц способствуют более полному закрытию пор в одних частях брикета по сравнению с другими.

Как видно из рис. 3,б, снижение удельного усилия деформирования при наличии сдвига между элементами модели во всем диапазоне изменения относительного объема прессовки неравномерно. Для исследованных значений  $\tau_k$  удельные усилия деформирования в долях от последнего при  $\tau_k = 0$  соответствуют значениям коэффициента В, приведенным в табл. 1.

Таблица 1. Изменение коэффициента В в зависимости от  $\beta$  при различных значениях  $\tau_k$

$\tau_k$	Значения коэффициента В при $\beta$						Среднее значение коэффициента В
	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,05	
0,5 к	0,64	0,68	0,75	0,75	0,73	0,68	0,68
0,86 к	0,38	0,43	0,55	0,54	0,52	0,49	0,48

Приведенные в таблице значения коэффициента В в зависимости от  $\beta$  даны в интервале изменения плотностей прессовок, представляющем наибольший интерес в практике прессования гранулированных материалов.

Вероятно, что при других  $\tau_k$  значения коэффициента В будут отличными от указанных. Имея значения коэффициента В для трех исследованных нами случаев (принимая по внимание, что при  $\tau_k = 0$   $V = 1$ ), охватывающих довольно большой интервал изменения  $\tau_k$ , можно ориентировочно определить коэф-

фициент для промежуточных значений касательных напряжений. Это дает возможность воспользоваться для расчета удельных усилий деформирования при сжатии со сдвигом выражением (1), которое может быть представлено в виде

$$p = V_k(2,1\beta - 2,5\sqrt{\beta - 1} - 1,4\ln\sqrt{\beta - 1} - 1,6).$$

Как следует из сказанного, влияние дополнительного сдвига на процесс уплотнения гранулированных материалов при их сжатии проявляется в снижении необходимого усилия для получения прессовок определенной плотности. Данное обстоятельство свидетельствует о том, что в реальных процессах получения полуфабрикатов и изделий из гранулированных материалов целесообразно реализовывать такие схемы, которые обеспечивали бы максимальные сдвиговые деформации между гранулами, равномерные по объему прессовок, для обеспечения их однородной плотности. Примерами таких схем могут служить боковое прессование, прессование из контейнеров специальной конструкции и т.д.

Получение компактного материала прессования гранул обусловлено совокупностью механического сцепления и схватывания. Не останавливаясь подробно на вопросах о влиянии различных технологических и других факторов на процесс схватывания металлов при их совместном деформировании, обратим внимание на то, что сдвиговые деформации между гранулами способствуют разрушению поверхностных пленок и возникновению участков непосредственного контакта чистых поверхностей металла, по которым происходит схватывание. Так что и с этой точки зрения сдвиговые деформации между удельными гранулами в процессе их уплотнения оказываются полезными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К а н д а у р о в И.И. Механика зернистых сред и ее применение в строительстве. — М.—Л.: Стройиздат, 1966. — 319 с.
2. М а к у ш о к Е.М., Д р о б ы ш е в с к и й А.Е. Связь между плотностью прессовок и давлением при сжатии гранулированных материалов. — Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук, 1976, № 4, с. 8—12.
3. Ш о ф м а н Л.А. Зависимость плотности прессовок из металлических порошков от давления прессования. — Порошковая металлургия, 1968, № 8, с. 5—14.
4. Г о л ь м а н Л.Д., И л ь и н Г.А., Ш о ф м а н Л.А. Некоторые вопросы теории процесса гидростатического прессования порошковых материалов. — Физика и химия обработки материалов, 1968, № 3, с. 95—103.
5. Теоретические основыковки и горячей объемной штамповки/Е.М. Макушоқ, А.С. Матусевич, В.П. Северденко, В.М. Сегал. — Минск: Наука и техника, 1968. — 407 с.
6. Ш о ф м а н Л.А. Основы расчета процесса штамповки и прессования. — М.: Машгиз 1961. — 340 с.