

фермы, описанной в работе [2], показало практическое совпадение результатов с результатами работы [2] и других авторов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хан М.Р., Уилмерт К.Д., Горнтон В.А. Метод критериев оптимальности для крупных конструкций. — Ракетная техника и космонавтика, 1979, т. 17, № 7, с. 102–112.
2. Быковский С.Г. Способ оптимальной корректировки сечений элементов шарнирно-стержневых систем по условиям допустимой жесткости. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1983, вып. 10, с. 69–74.
3. Виноградов А.И. Задача оптимального проектирования и ее особенности для стержневых систем. — Строит. мех. и расчет сооруж., 1974, № 4, с. 55–60.
4. Venkauya V.B., Khot N.S., Berke L. Application of optimality criteria approaches to automated design of large practical structures. — AGARD Second Symposium on Structural Optimization, Milan, Italy, April 1973, pp. 3 (1–20).

УДК 624.074

Ф.И. ПОДГАЙСКИЙ (БПИ)

### МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЯХ СФЕРИЧЕСКОГО КАРКАСА

Эксперименты, проведенные на моделях сферического стержневого каркаса, показали, что под действием механического и температурного нагружения стержни испытывают различные деформации. Так, весь каркас можно разделить на ряд областей, в пределах которых стержни испытывают преимущественно одну из простых форм деформаций: сжатие (растяжение), изгиб, кручение.

С учетом этого обстоятельства перенос результатов расчета напряженного состояния стержней с модели на натуру в пределах упругости можно производить исходя из схемы напряженно-деформированного состояния.

Исходим из обобщенного закона Гука для объемного напряженного состояния

$$\epsilon_1 E_v = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3); \quad (1)$$

$$\gamma = \tau / G, \quad (2)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения;  $\epsilon_1$  — главная деформация, соответствующая главному напряжению  $\sigma_1$ ;  $E_v$  — объемный модуль упругости;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $\gamma, \tau$  — сдвиг и касательное напряжение соответственно.

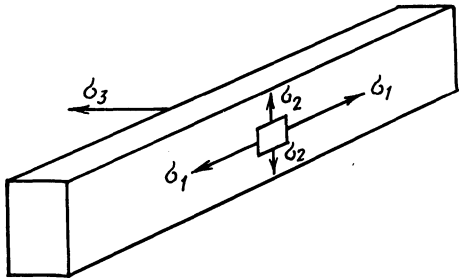
Разложим полную деформацию  $\epsilon_1$  на две части  $\epsilon_1 = \epsilon_1' + \epsilon_1''$ , где  $\epsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E_v}$ ;  $\epsilon_1'' = -\frac{\mu}{E_v} (\sigma_2 + \sigma_3)$ . Для полного подобия модели натурному объ-

екту необходимо, чтобы  $\epsilon_n = \epsilon_m$ , т.е.

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_n} = \frac{E_m}{E_n} \quad (3) \quad \text{и} \quad \frac{\mu_m}{\mu_n} \cdot \frac{\sigma_{2m}}{\sigma_{2n}} \cdot \frac{E_n}{E_m} = 1. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) справедливы лишь для плоского напряженного состояния ( $\sigma_3 = 0$ ) (но не для плоской деформации). Следовательно, для моделирования плоского напряженного состояния стержня конструкции достаточно, чтобы были выполнены равенства (3) и (4). Условно схема расположения главных напряжений представлена на рис. 1.

Однако при моделировании напряжений на моделях из материала ЭД-20М равенство (4), как правило, не выполняется из-за коэффициентов Пуассона



модели и натуре:  $\mu_M/\mu_H = 1,43 \neq 1$  (для пары сталь эпоксидный материал ЭД-20М). Поэтому приходится довольствоваться приближенным подобием  $\mu_M/\mu_H \approx 1$ .

Рис. 1. Схема расположения главных напряжений

Если в уравнении (1)  $\sigma_2 = -\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{\max}$ , то в поперечном сечении стержня имеет место чистый сдвиг, т.е. кручение стержня вокруг оси, параллельной главному напряжению  $\sigma_1$  (рис. 1). В этом случае для моделирования напряжений в поперечном сечении можно использовать формулу (2). Если принять  $\frac{\gamma_M}{\gamma_H} = 1$ , то условие моделирования будет выглядеть:

$$\frac{\tau_M}{\tau_H} = \frac{G_M}{G_H}$$

При соблюдении условий подобия во всех направлениях должны соблюдаться равенства

$$\frac{\epsilon_{1M}}{\epsilon_{2M}} = \frac{\epsilon_{1H}}{\epsilon_{2H}} ; \frac{\epsilon_{2M}}{\epsilon_{3M}} = \frac{\epsilon_{2H}}{\epsilon_{3H}} ; \frac{\epsilon_{1M}}{\epsilon_{3M}} = \frac{\epsilon_{1H}}{\epsilon_{3H}}$$

При наложении осевого растяжения (сжатия) на чистое кручение ( $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 = -\sigma_3$ ) точное подобие относительных деформаций не обеспечивается.

При чистом кручении без осевого растяжения ( $\sigma_1 = 0$ ), если  $\epsilon_1 = 0$ , то  $\sigma_2 = \frac{E}{1 + \mu} = G$ .

Изгиб стержней под действием внешних усилий часто сопровождается потерей устойчивости. Поэтому очень важно определить критическую нагрузку на стержень и соответствующее ей критическое напряжение. Критическое усилие определяется по формуле

$$P = cE \frac{I}{l^2}$$

где  $c$  – коэффициент, зависящий от способа крепления стержней;  $I$  – момент инерции стержня относительно оси, вдоль которой действует нагрузка;  $l$  – длина стержня, т.е. расстояние между креплениями.

Для случая, когда действует вдоль стержня, критическое напряжение  $\sigma_{кр} = P/S$ , где  $S$  – поперечное сечение стержня. Естественно, что  $\sigma_{кр}$  определяется лишь для стержней, испытывающих преимущественную деформацию сжатия,

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{S} = \frac{cEI}{l^2 S} \quad (5)$$

Исходя из теории размерности  $I, m^4$ , получим следующие критерии подобия для случая критического напряжения:

$$\frac{\sigma_{кр.м}}{\sigma_{кр.н}} = \frac{c_м}{c_н} \cdot \frac{E_м}{E_н} \cdot \frac{I_м}{I_н} \cdot \frac{l_н^2}{l_м^2} \cdot \frac{S_н}{S_м}$$

Но  $\frac{c_м}{c_н} = 1$  – в силу геометрического и конструктивного подобия,

$$\frac{I_м}{I_н} \cdot \frac{l_н^2}{l_м^2} \cdot \frac{S_н}{S_м} = 1 \text{ – по теории размерности.}$$

Тогда

$$\frac{\sigma_{кр.м}}{\sigma_{кр.н}} = \frac{E_м}{E_н}$$

Критическое напряжение для модели можно посчитать по формуле (5). Сравнивая его с действующими в стержнях напряжениями можно определить зоны относительной неустойчивости стержней.

На моделях сферического стержневого каркаса проводилось определение напряженно-деформированного состояния модели методом фотоупругости при действии двух статических равномерно распределенных нагрузок: горизонтальной и вертикальной одного порядка. Описание эксперимента приведено в работе [1]. Из 190 стержней, составляющих каркас, преимущественную деформацию кручения имеют 61,1 % стержней, изгиб – 35,1 %, сжатие (растяжение) – 3,8 %. Учитывая, что стержни каркаса относятся к тонким стержням, были посчитаны главные напряжения только на свободном контуре модели и построены эпюры для характерных видов деформаций.

Значения главных напряжений на свободном контуре стержней модели при данном виде нагружения составляют: при сжатии (растягивании) – 0,008–0,066 МПа; при кручении – 0,008–0,15 МПа; при изгибе – 0,06–0,2 МПа.

Для пересчета напряжений с модели на натуральный объект можно воспользоваться формулой  $\sigma_н = \frac{k_p}{k_l k_\delta} \cdot \frac{\sigma_0^{(1,0)}}{\delta}$  m, полученной из условия моделирова-

ния  $\frac{k_p}{k_\sigma k_l k_\delta} = 1$  [2], где  $k_p = \frac{P_н}{P_м}$  – коэффициент подобия по нагрузке;

$\kappa_1 = \frac{l_n}{l_m}$  – коэффициент подобия по длине стержня;  $\kappa_\delta = \frac{\delta_n}{\delta_m}$  – коэффициент подобия по толщине стержня;  $\sigma_0$  – постоянная материала по нормальным напряжениям;  $\delta$  – толщина модели;  $m$  – порядок полосы, отсчитываемый от изотропной области.

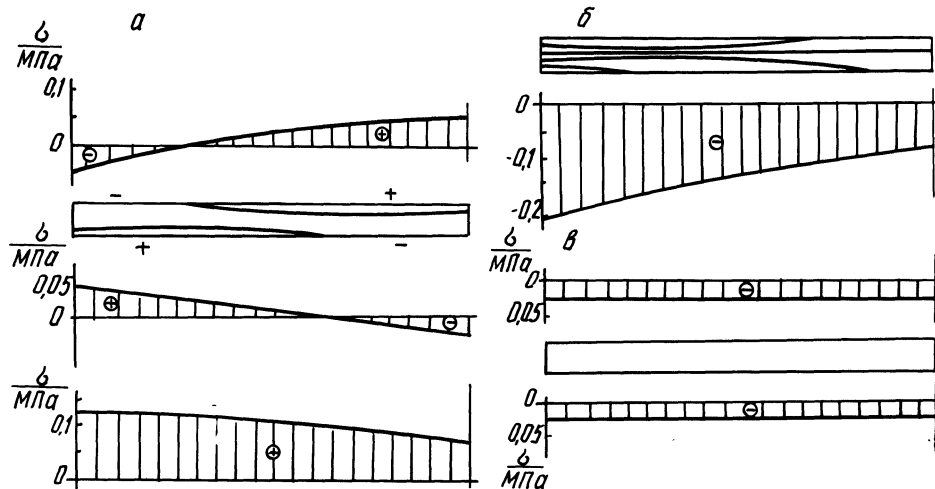
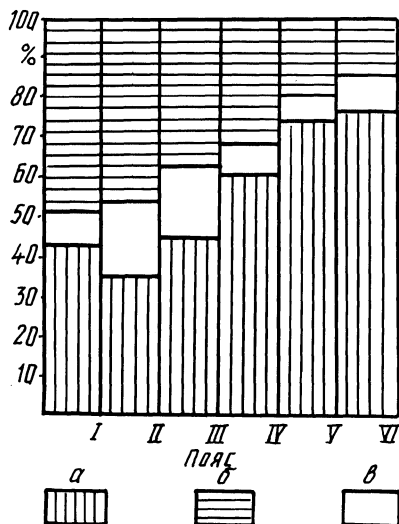


Рис. 2. Эпюры главных напряжений на контуре стержней, работающих на: а – кручение; б – изгиб; в – сжатие



На рис. 2 приведены характерные картины полос и эпюры главных напряжений на контуре стержней модели при различных деформациях. На рис. 3 приведена диаграмма видов деформаций стержней купола в зависимости от их расположения в конструкции.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. При заданных условиях нагружения объекта стержни испытывают преимущественную деформацию кручения и изгиба.

Рис. 3. Диаграмма видов деформаций стержней в конструкции:

а – кручение, б – изгиб, в – сжатие

2. Максимальные главные напряжения на контуре стержней возникают в местах крепления и соответствуют деформации изгиба.

3. Минимальные напряжения соответствуют чистому растяжению (сжатию).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Подгайский Ф.И. Исследование напряженно-деформированного состояния сферического стержневого каркаса, подвергаемого механическому и температурному нагружениям. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1984, вып. 11, с. 65–70. 2. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризациино-оптические методы механики деформируемого тела. — М.: Наука, 1973, с. 43–66.

УДК 517.946

М.И. ЖАДАН, А.Т. УСС (ГГУ)

## ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

В ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  рассмотрим систему трех уравнений вида

$$\Delta u + \chi(x) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \sum_{|\vartheta| \leq 1} A_{\vartheta}(x) \frac{\partial^{|\vartheta|} u}{\partial x^{\vartheta}} = -\rho f(x). \quad (1)$$

Здесь  $f$  — массовая сила;  $\rho > 0$  — плотность среды;  $\chi(x)$  — гладкая функция, определяемая упругими характеристиками среды [2];  $A_{\vartheta}(\vartheta$  — мультииндекс) — гладкие вещественные матрицы третьего порядка. Система (1) (см. [7]) эллипична при всех значениях  $\chi(x)$ , за исключением  $\chi(x) = -1$ .

В случае, когда среда однородна и изотропна ( $\chi = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$ ,  $A_{\vartheta} = 0$ ;  $\lambda, \mu$  — постоянные Ламе,  $\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$ ,  $\mu > 0$ ) основные краевые задачи изучены в работах [1,2] и др.

Рассмотрим сначала задачу Дирихле (по поводу обозначения пространств см. [3]).

**Задача Дирихле.** Найти решение  $u = (u_1, u_2, u_3) \in C^{(2, \omega)}(\Omega) \cap C^{(0, \omega)}(\bar{\Omega})$  системы (1) удовлетворяющее на границе  $S$  следующему краевому условию:

$$u(x) \Big|_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \Omega}} = g(y) \quad (y \in S, g \in C^{(0, \omega)}(S)). \quad (2)$$

Задача (1), (2) является нетеровой лишь в случае, если выполняется известное условие Я.Б. Лопатинского [4]. Проверим выполнение этого условия. Для этого воспользуемся результатом работы [5]. Имеем: