На основании формул (4), (5) задача решалась численно. Задавались отдельные координаты точек контура, значения угла наклона касательной к контуру, значения функции $d\overline{f}/dt$. Функция $\overline{f(t)}$ вычислялась численно. Сингулярные интегралы, фигурирующие в формулах (4), (5), от функций $\overline{f(t)}$, $d\overline{f}/dt$ считались путем кусочно-линейной аппроксимации плотности. Затем решалась система (4) методом последовательных приближений. При вычислении интегралов в правой части (4) в n опорных точках контур разбивался на n участков. Функция $\varphi(t)$, $\varphi^*(t)$ заменялись постоянной на каждом из участков. После определения функции $\varphi(t)$ по формуле (5) определялась функция $\Phi(t)$ в тех же опорных точках. Рассматривался случай отверстия, близкого к квадратному $t(\varphi) = 0{,}6(e^{-i\varphi} - 1/6\, e^{3i\varphi})$, при гидростатическом нагружении $P = 1$; опорные точки $\varphi_k = 2\pi(k - 0{,}5)/N$; $N = 64$. При решении системы (4) было сделано 15 итераций. Во второй строке таблицы приведены значения функции $\Phi(t)$, полученные из соотношения (5), в третьей – точные.

Т а б л и ц а 1. **Значения функции**

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Re [Φ(t)]	0,332	0,320	0,292	0,241	0,145	–0,039	–0,388	–0,723
Re [Φ(t)]	0,332	0,320	0,292	0,241	0,145	–0,040	–0,396	–0,893

ЛИТЕРАТУРА

1. П а р т о н В.З., П е р л и н П.И. Интегральные уравнения теории упругости. – М.: Наука, 1977. – 311 с. 2. А р с е н я н В.А., З а р г а р я н С.С., М и р т и р о с я н В.Р. О решении интегральных уравнений плоской теории упругости методом последовательных приближений. – Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 1, с. 79–83. 3. Р о м а н ч а к В.М. О некоторых соотношениях математической теории упругости для контура с угловыми точками. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1982, вып. 9, с. 58–62. 4. М у с х е л и ш в и л и Н.Н. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

УДК 624.072.2

С.Г. БЫКОВСКИЙ, канд.техн.наук (БПИ)

СПОСОБ ОПТИМИЗАЦИИ ОДНАЖДЫ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В последнее время возобновился интерес к методам решения задач оптимизации различных конструкций с позиций обратной задачи строительной механики. В этом случае выдвигается и обосновывается дополнительное требование к напряженно-деформированному состоянию оптимизируемой системы и строится процедура нахождения значений параметров, обеспечивающих выполнение выдвинутого требования. В работах [1,4] решения задач оптимизации сложных конструкций выведены на основании формализованных требований к их напряженно-деформированному состоянию: получены итерационные рекуррентные зависимости, обеспечивающие выполнение необходимых условий оптимальности (условий Куна-Таккера) для функций, описывающих расход материала на систему и ее напряженно-деформированное состояние. Однако неявный характер зависимостей усилий в элементах рассматриваемых систем от оптимизируемых параметров вынудил авторов ввести ряд допущений, сказавшихся на качестве решений.

Расчетные схемы некоторых применяемых в строительстве конструкций могут быть представлены как однажды статически неопределимые шарнирно-стержневые системы, например фермы с затяжкой. В настоящей работе рассматриваются линейно-упругодеформируемые шарнирно-стержневые системы, степень статической неопределимости которых равна единице. Решается задача нахождения площадей сечений элементов, обеспечивающих наименьший расход материала и выполнение условий прочности и устойчивости элементов и условий статической и кинематической совместности системы и ее допустимой жесткости.

Равенство единице степени статической неопределимости рассматриваемых систем позволяет получить в явном виде дифференцируемые зависимости усилий в элементах системы от их жесткостных параметров, что обеспечивает построение процедуры решения задачи на основе условий Куна-Таккера, не вводя никаких допущений относительно указанных зависимостей.

Применительно к нормам проектирования металлических конструкций математическую модель сформулированной задачи без условий статической и кинематической совместности системы запишем в виде

$$\min_{F_{i=1,\dots,I}} V = \sum_{i=1}^{I} F_i L_i \; ; \tag{1}$$

$$F_i - \max\left(\frac{N_i^+}{\alpha_i R_i} , \frac{-N_i^-}{\varphi_i m_i R_i} , F_{\min_i} \right) \geqslant 0, \tag{2}$$

$$i = 1,\dots, I \; ;$$

$$\max_{q=1,\dots,Q} \sum_{i=1}^{I} \frac{\overline{N}_{ij} N_{iq}}{E_i \; F_i} L_i - [Y_j] \leqslant 0, \tag{3}$$

$$j = 1,\dots, J \, .$$

Смысл обозначений в выражениях (1)–(3) представлен в работе [2]. Раскрывая статическую неопределимость системы на основе метода сил, запишем

$$N_{iq} = N_{iq}^p + \overline{N}_i \; X_q = N_{iq}^p - \overline{N}_i \frac{\Delta_q}{\delta} \; , \; i = 1,\dots, I; \tag{4}$$

$$\Delta_q = \sum_{i=1}^{I} \frac{\overline{N}_i \; N_{iq}^p}{E_i \; F_i} L_i \; ; \; \delta = \sum_{i=1}^{I} \frac{\overline{N}_i^2 \, L_i}{E_i F_i} \, , \tag{5}$$

где N^p_{iq}, $\overline{N}_i$ – усилия в i-м стержне основной системы, вызванные соответственно q-м сочетанием нагрузок и единичным значением усилия в "лишней" связи; X_q – значение основного неизвестного, вызванное q-й нагрузкой; Δ_q, δ – перемещения в основной системе, вызванные соответственно q-й нагрузкой и единичным значением основного неизвестного.

Основываясь на логически построенном в [3] предположении, что искомое оптимальное решение является граничной точкой пространства параметров, для его получения воспользуемся необходимыми условиями оптимальности решения – условиями Куна-Таккера. Из предположения о граничности оптимального решения следует, что для него выражения (2), (3) должны выполняться как равенства.

Для целевой функции (1) и ограничений (2), полагая в них знак равенства, функция Лагранжа имеет вид

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{I} \left\{ F_i L_i + \tau_i \left[F_i - \max \left(\frac{N_i^+}{\alpha_i R_i}, \frac{-N_i^+}{\varphi_i\ m_i\ R_i}, F_{\min_i} \right) \right] \right\},$$

где Λ, τ_i – функция Лагранжа и множитель Лагранжа, связанные с i-м ограничением.

Применяя далее изложенную в [2] методику решения задачи, но учитывая при вычислении $\partial\Lambda/\partial F_i$ ($i = 1,..., I$) зависимость N_i^+, N_i^- от F_i ($i = 1,..., I$) по выражениям

$$N_i^+ = \max_{q=1,...,Q} (N_{iq}, 0), \quad N_i^- = \min_{q=1,...,Q} (0, N_{iq}), \quad i = 1,...,I,$$

а также зависимости (4), (5), получаем рекуррентную зависимость, связывающую значения параметров на k-й и (k + 1)-й итерациях:

$$F_i^{k+1} = \max \left\{ F^k_{\min_i}, F_i^k \left[\tau_i^k \left(\frac{\overline{N}_i^2 \ (N^{p(k)}_{iq^i} \delta^k - \overline{N}_i \Delta^k_{q^i})}{E_i\ (F_i^k)^2\ \gamma_i^k R_i\ \ (\delta^k)^2} - \frac{1}{L_i} \right) \right]^{1/\eta} \right\}, \tag{6}$$

$i = 1, ..., I$,

где q^i – номер сочетания нагрузок, определяющего площадь сечения i-го стержня; $\gamma_i = \alpha_i$, если q^i – сочетание вызывает в i-м стержне растяжение, и $\gamma_i = \varphi_i\ m_i$, если сжатие.

Рекуррентную зависимость, связывающую значения множителей Лагранжа на (k–1)-й и k-й итерациях, получаем из условий $\partial\Lambda/\partial\tau_i = 0$, $i = 1,...,I$:

$$\tau_i^k = \tau_i^{k-1} \left\{ \frac{1}{F_i^k} \max \left[\frac{(N_i^+)^k}{\alpha_i\ R_i}, \frac{(-N_i^-)^k}{\varphi_i^k m_i^k\ R_i}, F^k_{\min_i} \right] \right\}^{1/\varkappa}, \tag{7}$$

$i = 1,..., I$.

Запишем функцию Лагранжа для целевой функции (1) и ограничений (3):

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{I} F_i L_i + \sum_{j=1}^{J} \tau_j \Big(\max_{q=1,\dots,Q} \sum_{i=1}^{I} \frac{\bar{N}_{ij} N_{iq}}{E_i F_i} L_i - [Y_j] \Big).$$

Применяя условия оптимальности $\partial\Lambda/\partial F_i = 0$ и $\partial\Lambda/\partial\tau_j = 0$ и методику работы [2], получаем рекуррентные зависимости для итерационного пересчета параметров и множителей Лагранжа:

$$F_i^{k+1} = F_i^{k} \Big[\sum_{j=1}^{J} \tau_j^{k} \frac{\bar{N}_{ij}^{k}}{E_i (F_i^{k})^2} (N_{iqj}^{p\,(k)} + \frac{\Delta_{qj}^{k} \bar{N}_i^3 L_i}{(\delta^k)^2 E_i F_i^k} -$$

$$- \frac{\bar{N}_i^2 N_{iqj}^{p\,(k)} L_i}{\delta^k E_i F_i^k} - \frac{\Delta_{qj}^{k} \bar{N}_i}{\delta^k}) \Big]^{1/\beta}, \; i = 1,\dots, I; \qquad (8)$$

$$\tau_j^{k} = \tau_j^{k-1} \Big(\frac{1}{[Y_j]} \sum_{i=1}^{I} \frac{\bar{N}_{ij}^{k} N_{iqj}^{k}}{E_i F_i^{k}} L_i \Big)^{1/\nu}, \; j = 1,\dots, J, \qquad (9)$$

где q^j – номер сочетания нагрузок, вызывающего наибольшее перемещение по j-му направлению.

Алгоритм оптимизации однажды статически неопределимых шарнирно-стержневых систем, основанный на зависимостях (6)–(9), предусматривает следующие действия.

1. При исходных значениях площадей поперечных сечений элементов выполняется анализ напряженно-деформированного состояния системы.

2. Начальные значения τ_i, i = 1,..., I в (6) подбираются из условий равенства единице выражений в квадратных скобках в (6).

3. Начальные значения τ_j принимаются пропорциональными степени нарушения ассоциированных с ними ограничений на перемещения и такими, чтобы наибольшее по i = 1, ..., I значение выражения в квадратных скобках в (8) было не меньше единицы. Затем найденные значения τ_j умножаются на отношения значений перемещений к их предельно допустимым значениям.

4. Далее в итерационном цикле выполняются следующие действия:

а) по выражениям (6) и (8) определяются требуемые значения площадей сечений элементов, из которых выбирается большее для каждого элемента;

б) производится анализ напряженно-деформируемого состояния системы и проверяется выполнение ограничений (2), (3) задачи и сходимость итерационного процесса по объему (расход материала на смежных итерациях не должен отличаться более чем на заданное значение). Если эти условия выполняются, то оптимальное решение получено. В противном случае расчет продолжается;

в) по выражениям (7), (9) определяются новые значения множителей Лагранжа и начиная с пункта а) действия повторяются.

Описанная методика реализована в программе для ЭВМ. Ее применение для решения задачи оптимизации четырехэлементной пространственной фермы, описанной в работе [2], показало практическое совпадение результатов с результатами работы [2] и других авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хан М.Р., Уилмерт К.Д., Торнтон В.А. Метод критериев оптимальности для крупных конструкций. – Ракетная техника и космонавтика, 1979, т. 17, № 7, с. 102–112. 2. Быковский С.Г. Способ оптимальной корректировки сечений элементов шарнирно-стержневых систем по условиям допустимой жесткости. – В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1983, вып. 10, с. 69–74. 3. Виноградов А.И. Задача оптимального проектирования и ее особенности для стержневых систем. – Строит. мех. и расчет сооруж., 1974, № 4, с. 55–60. 4. Venkayya V.B., Khot N.S., Berke L. Application of optimality criteria approaches to automated design of large practical structures. – AGARD Second Symposium on Structural Optimization, Milan, Italy, April 1973, pp. 3 (1–20).

УДК 624.074

Ф.И. ПОДГАЙСКИЙ (БПИ)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЯХ СФЕРИЧЕСКОГО КАРКАСА

Эксперименты, проведенные на моделях сферического стержневого каркаса, показали, что под действием механического и температурного нагружения стержни испытывают различные деформации. Так, весь каркас можно разделить на ряд областей, в пределах которых стержни испытывают преимущественно одну из простых форм деформаций: сжатие (растяжение), изгиб, кручение.

С учетом этого обстоятельства перенос результатов расчета напряженного состояния стержней с модели на натуру в пределах упругости можно производить исходя из схемы напряженно-деформированного состояния.

Исходим из обобщенного закона Гука для объемного напряженного состояния

$$\epsilon_1 E_v = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3); \tag{1}$$

$$\gamma = \tau / G, \tag{2}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 – главные напряжения; ϵ_1 – главная деформация, соответствующая главному напряжению σ_1; E_v – объемный модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; γ, τ – сдвиг и касательное напряжение соответственно.

Разложим полную деформацию ϵ_1 на две части $\epsilon_1 = \epsilon_1' + \epsilon_1''$, где $\epsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E_v}$; $\epsilon_1'' = -\frac{\mu}{E_v}(\sigma_2 + \sigma_3)$. Для полного подобия модели натурному объекту необходимо, чтобы $\epsilon_н = \epsilon_м$, т.е.

$$\frac{\sigma_м}{\sigma_н} = \frac{E_м}{E_н} \quad (3) \quad и \quad \frac{\mu_м}{\mu_н}\,\frac{\sigma_{2м}}{\sigma_{2н}} \cdot \frac{E_н}{E_м} = 1. \tag{4}$$