dia. – Proc. Symp. Appl. Math., 1962, vol. 13, p. 116–131. 7. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1978, ч. II. – 463 с. 8. Чигарев А.В. Распространение волн в упругой микронеоднородной среде. – Изв. АН СССР. МТТ. – 1980, № 4, с. 128–135. 9. Григорьев О.А., Шермергов Т.Д. Распространение ультразвуковых волн в поликристаллах кубической симметрии с учетом многократного рассеяния. – ПММ, 1980, т. 44, вып. 2, с. 310–319. 10. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. – М.: Наука, 1975. – 415 с. 11. Чигарев А.В. Вычисление динамического тензора Грина стохастически неоднородной упругой среды. – ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 916–922. 12. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. – М.: Высш. шк., 1978. – 274 с. 13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. – 294 с.

УДК 539.3

Л.П. КНЯЗЕВА (БГУ)

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Рассматривается ортотропная упругая среда, имеющая три взаимно ортогональные плоскости симметрии. Линии пересечения этих плоскостей являются осями симметрии второго порядка и образуют кристаллографическую систему координат [1].

Компоненты тензора упругих постоянных в кристаллографической системе координат имеют вид

$$C_{ijkl} = \sum_{n=1}^{3} [\lambda_n \delta_{in}\delta_{jn}\delta_{kn}\delta_{ln} + \mu_n(\delta_{in}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ln} + \nu_n(\delta_{in}\delta_{jk}\delta_{ln} + \delta_{jn}\delta_{ik}\delta_{ln} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{il}\delta_{kn})]. \tag{1}$$

Упругие постоянные λ_i, μ_i, ν_i связаны с двухиндексными постоянными упругости C_{mn} следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \lambda_1 = C_{11} + C_{23} + 2C_{44} - (C_{12} + C_{13} + 2C_{55} + 2C_{66}); \\ \lambda_2 = C_{22} + C_{13} + 2C_{55} - (C_{12} + C_{23} + 2C_{44} + 2C_{66}); \\ \lambda_3 = C_{33} + C_{12} + 2C_{66} - (C_{13} + C_{23} + 2C_{44} + 2C_{55}); \\ 2\mu_1 = C_{12} + C_{13} - C_{23}; \\ 2\mu_2 = C_{12} + C_{23} - C_{13}; \\ 2\mu_3 = C_{13} + C_{23} - C_{12}; \\ 2\nu_1 = C_{55} + C_{66} - C_{44}; \\ 2\nu_2 = C_{44} + C_{66} - C_{55}; \; 2\nu_3 = C_{44} + C_{55} - C_{66}. \end{cases} \tag{2}$$

Система уравнений упругого равновесия в перемещениях для ортотропной среды имеет вид

$$\begin{cases} C_{44}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + C_{66}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + C_{55}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big[(C_{11} - C_{44})\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\ +(C_{12} + C_{66})\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + (C_{13} + C_{55})\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big] = 0; \\ C_{66}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + C_{55}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + C_{44}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big[(C_{12}+C_{66})\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\ +(C_{22} - C_{55})\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + (C_{23} + C_{44})\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big] = 0; \\ C_{55}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + C_{44}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + C_{66}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial}{\partial x_3}\Big[(C_{13} + C_{55})\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \\ + (C_{23} + C_{44})\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + (C_{33} - C_{66})\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big] = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Характеристическая матрица системы (3) выражается следующим образом:

$$Q_{ik}(\xi) = (\mu_i + \mu_k + \nu_i + \nu_k) + \delta_{ik}\Big(\lambda_i \xi_i^2 + \sum_{n=1}^{3} (\nu_i + \nu_n)\xi_n^2\Big). \tag{4}$$

Определитель характеристической матрицы имеет вид

$$\| Q_{ik}(\xi) \| = B_1\xi_1^6 + B_2\xi_2^6 + B_3\xi_3^6 + B_4\xi_1^4\xi_2^2 + B_5\xi_1^4\xi_3^2 + B_6\xi_2^4\xi_1^2 + \\ + B_7\xi_2^4\xi_3^2 + B_8\xi_3^4\xi_1^2 + B_9\xi_3^4\xi_2^2 + B_{10}\xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2, \tag{5}$$

где

$$\begin{cases} B_1 = C_{11}C_{55}C_{66}; \\ B_2 = C_{22}C_{44}C_{66}; \\ B_3 = C_{33}C_{44}C_{55}; \\ B_4 = C_{11}C_{22}C_{55} + C_{11}C_{44}C_{66} - C_{55}C_{12}^2 - 2C_{12}C_{55}C_{66}; \\ B_5 = C_{11}C_{33}C_{66} + C_{11}C_{44}C_{55} - C_{66}C_{13}^2 - 2C_{13}C_{55}C_{66}; \\ B_6 = C_{11}C_{22}C_{44} + C_{22}C_{55}C_{66} - C_{44}C_{12}^2 - 2C_{12}C_{44}C_{66}; \\ B_7 = C_{22}C_{44}C_{55} + C_{22}C_{33}C_{66} - C_{66}C_{23}^2 - 2C_{23}C_{44}C_{66}; \\ B_8 = C_{11}C_{33}C_{44} + C_{33}C_{55}C_{66} - C_{44}C_{13}^2 - 2C_{13}C_{44}C_{55}; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} B_9 = C_{33}C_{44}C_{66} + C_{22}C_{33}C_{55} - C_{55}C_{23}^2 - 2C_{23}C_{44}C_{55}\,; \\ B_{10} = 4C_{44}C_{55}C_{66} + 2C_{12}C_{13}C_{23} + 2C_{12}C_{23}C_{55} + C_{11}C_{22}C_{33} + \\ + 2C_{12}C_{13}C_{44} + 2C_{12}C_{44}C_{55} + 2C_{13}C_{23}C_{66} + 2C_{23}C_{55}C_{66} + \\ + 2C_{13}C_{44}C_{66} - 2C_{13}C_{22}C_{55} - 2C_{11}C_{23}C_{44} - C_{22}C_{13}^2 - C_{11}C_{23}^2 - \\ - C_{33}C_{12}^2 - 2C_{12}C_{33}C_{66}\,. \end{cases} \tag{6}$$

Квадратичная форма (4) положительно определена, так как она совпадает с выражением потенциальной энергии деформации $Q_{ik}(\xi)$, отсюда следует эллиптичность системы (3).

Фундаментальным решением U_{ik} (x=y) системы (3) является решение неоднородного уравнения

$$D_{ik}(U_{km}(x-y)) = -\delta_{im}\delta(x-y), \tag{7}$$

где D_{ik} – линейный дифференциальный оператор системы (3); $\delta(x-y)$ – дельта-функция.

Согласно [2] фундаментальное решение системы (3) может быть записано в виде

$$U_{ik}(x-y) = \frac{1}{8\pi^2|x-y|}\oint_{|\xi|=1} P_{ik}(\xi)\,ds\,. \tag{8}$$

Интегрирование в (8) производится по единичной окружности в плоскости, перпендикулярной вектору x – y, с центром в точке x; $P_{ik}(\xi)$ – матрица, обратная характеристической матрице $Q_{ik}(\xi)$,

$$P_{ik}(\xi) = \frac{\Delta_{ik}(\xi)}{\Delta(\xi)}\,,$$

где $\Delta(\xi)$ – определитель матрицы $Q_{ik}(\xi)$; $\Delta_{ik}(\xi)$ – алгебраическое дополнение элемента $Q_{ik}(\xi)$.

Выражения для Δ_{ik} имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta_{11} = C_{55}C_{66}\xi_1^4 + C_{22}C_{44}\xi_2^4 + C_{33}C_{44}\xi_3^4 + (C_{22}C_{55} + \\ + C_{44}C_{66})\xi_1^2\xi_2^2 + (C_{33}C_{66} + C_{44}C_{55})\xi_1^2\xi_3^2 + (C_{22}C_{33} - \\ - 2C_{23}C_{44} - C_{23}^2)\xi_2^2\xi_3^2\,; \\ \Delta_{22} = C_{11}C_{55}\xi_1^4 + C_{44}C_{66}\xi_2^4 + C_{33}C_{55}\xi_3^2 + (C_{11}C_{44} + \\ + C_{55}C_{66})\xi_1^2\xi_2^2 + (C_{33}C_{66} + C_{44}C_{55})\xi_2^2\xi_3^2 + (C_{11}C_{33} - \\ - 2C_{13}C_{55} - C_{13}^2)\,\xi_1^2\xi_3^2\,; \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases}
\Delta_{33} = C_{11}C_{66}\,\xi_1^4 + C_{22}C_{66}\xi_2^4 + C_{44}C_{55}\xi_3^4 + (C_{11}C_{44} + \\
+ C_{55}C_{66})\xi_1^2\xi_3^2 + (C_{22}C_{55} + C_{44}C_{66})\xi_2^2\xi_3^2 + (C_{11}C_{22} - \\
- 2C_{12}C_{66} - C_{12}^2)\xi_1^2\xi_2^2\,, \\
\Delta_{12} = (C_{12} + C_{66})(C_{55}\xi_1^2 + C_{44}\xi_2^2 + C_{33}\xi_3^2)\xi_1\xi_2 - \\
-(C_{13} + C_{55})(C_{23} + C_{44})\xi_1\xi_2\xi_3^2\,; \\
\Delta_{13} = -(C_{13} + C_{55})(C_{66}\xi_1^2 + C_{22}\xi_2^2 + C_{44}\xi_3^2)\xi_1\xi_3 + \\
+(C_{12} + C_{66})(C_{23} + C_{44})\xi_1\xi_2^2\,\xi_3; \\
\Delta_{23} = (C_{23} + C_{44})(C_{11}\xi_1^2 + C_{66}\xi_2^2 + C_{55}\xi_3^2)\xi_2\xi_3 - \\
-(C_{12} + C_{66})(C_{13} + C_{55})\xi_1^2\xi_2\xi_3\,.
\end{cases} \tag{9}$$

Введем сферические координаты для вектора $x - y = R\rho$, где $R = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2}$; ρ – единичный вектор,

$$\rho = (\sin\theta\cos\psi\,,\ \sin\theta\sin\psi,\ \cos\theta\,);$$

$$\theta = \arccos\rho_3;\ \ \psi = \operatorname{arctg}\rho_2/\rho_1\,.$$

Компоненты вектора ξ примут следующий вид:

$$\begin{cases}
\xi_1 = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi\,; \\
\xi_2 = -\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\cos\theta\sin\psi\,; \\
\xi_3 = \sin\varphi\sin\theta\,,
\end{cases} \tag{10}$$

где φ – угол в плоскости интегрирования.

Вводя замену переменных $z = \operatorname{tg}\varphi$, получим выражение для определителя системы (3) $|Q_{i\,\kappa}(\xi)| = \cos^6\varphi\, F(z)$, где

$$F(z) = \sum_{\kappa=0}^{6} a_\kappa z^\kappa. \tag{11}$$

Коэффициенты (11) имеют следующий вид:

$$a_0 = B_1\sin^6\psi + B_2\cos^6\psi + (B_4\sin^2\psi + B_6\cos^2\psi)\sin^2\psi\cos^2\psi\,;$$

$$a_1 = \cos\theta\sin\psi\cos\psi\,[\sin^4\psi(6B_1 - 2B_4) + \sin^2\psi\cos^2\psi\, 4(B_4 - B_6) + \\ + \cos^4\psi\,(2B_6 - 6B_2)\,]\,;$$

$$a_2 = \cos^2\theta\,[B_4\sin^6\psi + \sin^2\psi\cos^2\psi\,[\cos^2\psi(15B_2 + 6B_4 - 8B_6) + \\ + \sin^2\psi\,(15B_1 + 6B_6 - 8B_4)\,] + B_6\cos^6\psi] + \sin^2\theta\,(B_5\sin^4\psi + \\ + B_{10}\sin^2\psi\cos^2\psi + B_7\cos^4\psi\,)\,;$$

$$a_3 = \cos\theta\sin\psi\cos\psi\,\{\cos^2\theta\,[\sin^2\psi\cos^2\psi(20B_1 - 20B_2 + 12B_6 -$$

$$- 12B_4) + 4(B_4 - B_6)(\sin^4\psi + \cos^4\psi)] + \sin^2\theta[\sin^2\psi(4B_5 - 2B_{10}) +$$
$$+ \cos^2\psi\,(2B_{10} - 4B_7)]\};$$
$$a_4 = \cos^2\theta\,[B_4\cos^6\psi + \cos^2\psi\sin^2\psi(\cos^2\psi\,(15B_1 - 8B_4 + 6B_6) +$$
$$+ \sin^2\psi\,(15B_2 - 8B_6 + 6B_4)] + B_6\sin^6\psi\,] + \sin^2\theta\cos^2\theta\,[B_{10}\times$$
$$\times(\sin^4\psi + \cos^4\psi) + \sin^2\psi\cos^2\psi\,(6B_5 + 6B_7 - 4B_{10})] +$$
$$+ \sin^4\theta\,(B_8\sin^2\psi + B_9\cos^2\psi);$$
$$a_5 = \cos\theta\,\sin\psi\,\cos\psi\{\cos^4\theta\,[\cos^4\psi\,(6B_1 - 2B_4) + \sin^2\psi\cos^2\psi\,4(B_4 -$$
$$- B_6) + \sin^4\psi(6B_2 - 2B_6)] + \sin^2\theta\cos^2\theta\,[\cos^2\psi(4B_5 - 2B_{10}) +$$
$$+ \sin^2\psi(2B_{10} - 4B_7)] + \sin^4\theta\,2(B_8 - B_9)\};$$
$$a_6 = \cos^6\theta\,[B_1\cos^6\psi + \sin^2\psi\cos^2\psi\,(B_4\cos^2\psi + B_6\sin^2\psi) +$$
$$+ B_2\sin^6\psi\,] + \sin^2\theta\cos^4\theta(\sin^4\psi\,B_7 + B_{10}\sin^2\psi\cos^2\psi + B_5\cos^4\psi) +$$
$$+ \sin^4\theta\,\cos^2\theta\,(B_9\sin^2\psi + B_8\cos^2\psi) + B_3\sin^6\theta\,.$$

Миноры системы (3) примут вид $\Delta_{ik}(\xi) = \cos^4\varphi F_{ik}(z)$, где $F_{ik}(z)$ – полиномы четвертого порядка.

Фундаментальное решение $U_{ik}(x - y)$ согласно [2] может быть записано так:

$$U_{ik}(x-y) = \frac{i}{2\pi R}\sum_{m=1}^{3}\frac{F_{ik}(z_m)}{F'(z_m)}\,, \qquad (12)$$

где z_m – три корня (11), лежащие в верхней полуплоскости. Определитель характеристической матрицы (4) всегда больше нуля в силу эллиптичности системы (3), поэтому уравнение $F(z) = 0$ имеет три пары комплексно-сопряженных корней $z_k = \alpha_k \pm i\beta_k$:

$$F(z) = ((z - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)((z - \alpha_2)^2 + \beta_2^2)((z - \alpha_3)^2 + \beta_3^2).$$

Корни определялись численно на ЭВМ по методу Ньютона–Рафсона. Проведено исследование корней для различных видов анизотропии (ортотропии, гексогональной симметрии и кубической симметрии) и различных направлений вектора $x - y$. В табл. 1 приведены значения корней при $\psi = 0, \pi/4$ и $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ для арагонита, сегнетовой соли (орторомбическая система), магния (гексогональная система), арсенида галлия (кубическая система). У гексогонально-симметричных материалов действительные части корней малы, корни чисто мнимые или близкие к мнимым. Для случая кубической симметрии корни при некоторых ψ и θ определяются как $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, $-\alpha + i\beta$, $-\alpha - i\beta$.

Численная реализация формулы (12) проводилась для веществ с различной степенью проявления анизотропных свойств на ЭВМ. На рис. 1 приведены результаты расчетов фундаментального решения $U_{ik}(x - y)$ для арагонита

Т а б л и ц а 1. **Значения корней некоторых химических элементов**

	$\alpha_1 + i\beta_1$		$\alpha_2 + i\beta_2$		$\alpha_3 + i\beta_3$	
Арагонит	0,164	−0,843	−0,1	−0,27	−0,164	0,843
	0,418	−0,916	−0,418	−0,916	0,0	−0,857
$\psi = 0$	0,296	−0,961	−0,296	−0,916	0,0	−1,29
$\psi = \frac{\pi}{4}$	0,232	−0,966	−0,132	−0,82	−0,18	−1,2
	0,199	−0,705	−0,21	−0,925	−0,441	−1,45
	0,161	−0,804	−0,161	−0,804	0,0	−2,03
Сегнетовая соль	0,337	−1,05	−0,337	−1,05	0,0	−2,04
	0,525	−0,993	−0,525	−0,993	0,0	−1,10
$\psi = 0$	0,316	−0,956	−0,316	−0,956	0,0	−1,75
$\psi = \frac{\pi}{4}$	0,069	−0,725	0,156	−1,35	0,602	−0,776
	0,273	−0,58	0,018	−0,902	−0,236	−1,57
	0,119	−0,728	0,0	−2,19	−0,119	−0,728
Магний	0,0	−0,955	0,0	1,0	0,0	−1,05
	0,0	−0,788	0,0	−1,0	0,0	−1,19
$\psi = 0$	0,0	−0,698	0,0	−1,01	0,0	−1,41
$\psi = \frac{\pi}{4}$	0,0	−1,0	0,046	−0,998	−0,046	−0,998
	0,0	−0,811	0,0004	−1,01	−0,0005	−1,14
	0,0	−0,699	0,0	−1,01	0,0	−1,41
Арсенид галлия	0,580	−0,815	−0,580	−0,815	0,0	1,0
	0,476	−0,828	−0,476	−0,828	0,0	1,33
$\psi = 0$	0,58	−0,815	−0,58	−0,815	0,0	1,0
$\psi = \frac{\pi}{4}$	−0,011	−0,516	0,0	−1,0	0,04	−1,94
	−0,010	−0,566	0,371	−1,29	−0,362	−1,3
	0,522	−0,908	−0,522	−0,908	0,0	−0,743

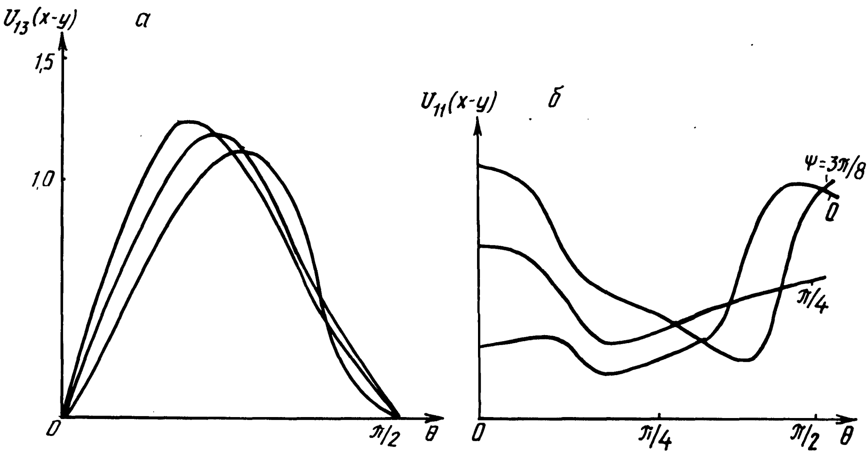

Рис. 1.Фундаментальные решения $U_{13}(x-y)$ для арагонита (а) и решения $U_{11}(x-y)$ для сегнетовой соли (б)

(C_{11} = 16, C_{22} = 8,7, C_{33} = 8,5, C_{44} = 4,12, C_{55} = 2,56, C_{66} = 4,27, C_{12} = 3,73, C_{13} = = 0,17, C_{23} = 1,57) и сегнетовой соли (C_{11} = 2,55, C_{22} = 3,81, C_{33} = 3,71, C_{44} = = 1,34, C_{55} = 0,321, C_{66} = 0,979, C_{12} = 1,41, C_{13} = 1,16, C_{23} = 1,46).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с. 2. Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н. О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упругоанизотропной среды. – ЖЭТФ, 1947, вып. 9, т. 17, с. 783–791.

УДК 539.3

В.М. РОМАНЧАК (БПИ)

О ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Решение задач плоской математической теории упругости может быть сведено к решению регулярных интегральных уравнений [1].

В работе [2] получено численное решение интегрального уравнения Шермана для многосвязных областей при малых расстояниях между границами. Для определения напряжений использовалась процедура численного дифференцирования. В работе [3] определение коэффициента интенсивности напряжений в вершине угловой точки контура предлагается производить на основании модифицированной формулы Бетти. Применительно к участку с гладкой границей этот подход позволяет связать определение напряжений на границе области с более простой задачей об определении перемещений, т.е. избежать процедуры численного дифференцирования.

Граничное условие в случае первой основной задачи математической теории упругости может быть записано в виде [4]

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t),$$

где $t \in L$, L – граница области; $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – граничные значения аналитических в D функций; $f(t)$ – известная функция.

Формула Бетти, модифицированная на комплексный случай, имеет вид [3]

$$\operatorname{Im}\left[\int_{L_1} \varphi(\tau)\, d\overline{f_0(\tau)} + \int_{L_1} \overline{f(\tau)}\, d\varphi_0(\tau)\right], \tag{1}$$

где $f_0(\tau) = \varphi_0(\tau) + \tau\overline{\varphi_0'(\tau)} + \overline{\psi_0(\tau)}$; $\varphi_0(\tau)$, $\psi_0(\tau)$ – аналитические функции.

Пусть сосредоточенные силы X и Y приложены в произвольной точке t границы полуплоскости, тогда [4]