

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко М.Д., Ильникова Н.И. Изгиб тонких круглых пластин переменной толщины. — Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1980, № 3, с. 17–24. 2. Мартыненко М.Д., Ильникова Н.И. Изгиб свободно опертой пластинки переменной толщины с начальной кривизной срединной поверхности. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1983, вып. 10, с. 35–41. 3. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. — М.: Физматгиз, 1959. — 294 с. 4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966. — 635 с.

УДК 534.22

А.В. ЧИГАРЕВ (БПИ)

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ДИНАМИКЕ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С УЧЕТОМ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Рассматривается решение дисперсионных уравнений стохастически неоднородной упругой среды с произвольной корреляционной функцией методом разложения в ряды коэффициентов рассеяния и скоростей волн с учетом многократного рассеяния. Рассмотрены также способы вычисления корней последовательными приближениями и приближением по степеням. Для экспоненциальной корреляционной функции рассмотрен способ приближенного суммирования гипергеометрических рядов, через которые выражаются скорости и коэффициенты рассеяния волн. Получена оценка границ такого решения. Для эталонной задачи можно получить точное решение уравнения, а также, разложив его в ряды, приближенное.

Вопросы нахождения собственных векторов, значений, распределений корней дисперсионных уравнений в задачах колебаний рассмотрены в работах [1–10]. Условия существования собственных векторов упругого оператора в виде средних плоских продольных и поперечных волн приводят к дисперсионным уравнениям относительно волновых чисел в граничной задаче или частот в начальной задаче. В общем случае дисперсионные уравнения являются трансцендентными или целыми функциями, поэтому корни находятся, как правило, приближенно. Исключение составляет эталонная задача, для которой уравнение решается точно. Основное значение имеет нахождение собственного вектора, соответствующего корню дисперсионного уравнения с минимальной мнимой частью (первый корень). Другие собственные векторы являются быстро затухающими. Во всех работах по распространению волн в случайно неоднородных средах рассматривается вычисление первого корня методом последовательных приближений и определение для соответствующего собственного вектора коэффициента рассеяния и скорости. В приближении однократного рассеяния задача рассматривалась в [3–6], с учетом многократного рассеяния в работах [7–10]. Решение приближением по корням рассмотрено в [10, 11].

1. Среднее поле перемещений $\langle u_i \rangle$ гармонической волны в стохастически неоднородной упругой среде удовлетворяет уравнениям

$$(\Lambda^* \langle u \rangle_{,x})_{,x} + \rho_0 \omega^2 \langle u \rangle = 0. \quad (1)$$

Здесь Λ^* – упругий эффективный оператор, который для статистически изотропной однородной среды имеет вид

$$\Lambda^* = \int \lambda^* (x - x_1) dx_1. \quad (2)$$

Собственными векторами оператора (2) являются в среднем плоские волны, условием существования которых в виде

$$\langle u \rangle = u(q) e^{iqx} \quad (3)$$

является дисперсионное уравнение

$$\Delta = |L_{i\kappa}| = 0, \quad L_{i\kappa} = \Lambda_{i\kappa} q^2 - \rho_0 \omega^2 \delta_{i\kappa}, \quad (4)$$

где Δ – детерминант системы уравнений

$$\begin{cases} L_{i\kappa} u_{\kappa} = 0, \quad e_j = q_j q^{-1}; \\ \Lambda_{i\kappa}(q) = \Lambda_{ij\kappa l}^*(q) e_j e_l. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\Lambda_{ij\kappa l}^*(q)$ – собственные значения упругого оператора.

Из (4) получаем, что в рассматриваемой среде существуют в среднем плоские продольные и поперечные волны, в которых связь между q и ω определяется дисперсионными уравнениями

$$\Delta_a = q_a^2 - \rho_0 \omega^2 \Lambda_a(q, \omega) = 0, \quad a = 1, t, \quad (6)$$

где Λ_a – собственные значения тензора $\Lambda_{i\kappa}$.

При решении граничной задачи ω в (6) действительная величина. В неограниченной среде у средних полей (3) плоскости равных фаз и амплитуд совпадают, поэтому

$$q_a = \varkappa_a(\omega) + i \delta_a(\omega). \quad (7)$$

Здесь δ_a – коэффициент рассеяния, а скорость вычисляется по формуле

$$c_a = (d\varkappa_a/d\omega)^{-1}. \quad (8)$$

При учете многократного рассеяния собственные значения $\lambda_{ij\kappa l}^*$ выражаются через собственные значения $\Gamma_{ij\kappa l}^*$ оператора поляризуемости [8]. Разложение тензоров $\lambda_{ij\kappa l}^*(q, \omega)$, $\Gamma_{ij\kappa l}^*(q, \omega)$ по базису $I_{ij\kappa l}^a(q)$ имеет вид

$$\begin{aligned} F^* &= F_2 I^1 + F_1 I^2 + \sum_{a=3}^6 F_a I^a \quad (F^* = \lambda^*, \Gamma^*); \\ I_{ij\kappa l}^1 &= \frac{1}{2} (\delta_{i\kappa} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{j\kappa}), \quad I_{ij\kappa l}^2 = \delta_{ij} \delta_{\kappa l}; \\ I_{ij\kappa l}^3 &= \delta_{ij} e_{\kappa} e_l; \quad I_{ij\kappa l}^4 = \delta_{\kappa l} e_i e_j; \end{aligned} \quad (9)$$

$$I_{ijkl}^5 = \frac{1}{4} (e_i e_k \delta_{jl} + e_i e_l \delta_{jk} + e_j e_l \delta_{ik} + e_j e_k \delta_{il})$$

$$I_{ijkl}^6 = e_i e_j e_k e_l.$$

Функции $\Gamma_\beta(q, \omega)$ выражаются через $P_n^p(q, \omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{na}^p = \int_0^\infty j_n(qr) y_a^{-p} e^{iy_a r} R(r) r^2 dr; \\ y_a = k_a r; k_a = \omega c_{a0}^{-1}; \alpha = l, t, \end{array} \right. \quad (10)$$

где $R(r)$ – корреляционная функция; $j_n(qr)$ – сферическая функция Бесселя. Раскладывая $j_n(qr)$ в ряд, получаем

$$\left. \begin{array}{l} P_{na}^p = \sum_{k=0}^{\infty} P_{na}^{pk} q^{2k}, P_{na}^{pk} = \frac{(-1)^k q^n R_{na}^{pk}}{(2n + 2k + 1)!! k! 2^k}; \\ R_{na}^{pk} = \int_0^\infty R(r) e^{iy_a r} r^{n+2k-p+2} dr. \end{array} \right\} \quad (11)$$

Из (11) следует, что $\Gamma_\beta(q, \omega)$ являются целыми функциями q^2

$$\Gamma_\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_\beta^{(n)} q^{2n}. \quad (12)$$

Рассмотрим случай сильной изотропии тензоров F_{ijkl}^* ($F_3 \dots F_6 = 0$), тогда [8]

$$\left. \begin{array}{l} K^*(q, \omega) = K_0 + K^1(q, \omega), K^l = \Gamma(1 - N^l \Gamma)^{-1}; \\ \lambda_2^*(q, \omega) = G_0 + \lambda_2^l(q, \omega), \lambda_2^l = \Gamma_2(1 - N^l \Gamma_2)^{-1}; \\ \Gamma = \Gamma_1 + 2/3 \Gamma_2; N^l = (K_0 + 4/3 G_0)^{-1}; \\ N^t = 6(K_0 + 2G_0) [5G_0(3K_0 + 4G_0)]^{-1}. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Собственные значения тензора $\Lambda_{1k}(q, \omega)$ в (6) запишем в виде

$$\Lambda_t = \lambda_2^*, \Lambda_l = K^* + 4/3 \lambda_2^*, \Lambda_a^l = \Lambda_a - \Lambda_{0a}. \quad (14)$$

Из (14) с учетом (12), (13) следует, что Λ_a для произвольной корреляционной функции являются мероморфными функциями q^2 , а значит, Δ_a также мероморфные функции относительно q^2 .

В дисперсионные уравнения (6) входят параметры $\eta_a = R_0 \Lambda_{0a}^{-2}$ и $\xi_a = a k_a$ ($\alpha = l, t$), характеризующие флуктуации свойств среды и масштаб неоднородности относительно длины волны. Поэтому решение (6) $q_a(\xi_a, \eta_a)$ также зависит от ξ_a, η_a . Будем рассматривать q_a как безразмерную величину $a q_a$. Обозначим $q_a^k(\xi_a, \eta_a)$ – k -й корень уравнения (6). Нумерация корней

идет по возрастанию модуля, корни попарно симметричны относительно начала координат. Устойчивой среде отвечают корни в верхней полуплоскости, которым присвоим нечетные номера.

Будем искать $q_a^k(\xi_a, \eta_a)$ в виде разложения по степеням $(\eta_a - b_a)$:

$$\begin{aligned} \varpi_a^k(\xi_a, \eta_a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_a - b_a)^n}{n!} \varpi_{a,\eta^n}^{(n)}(\xi_a, b_a); \\ \delta_a^k(\xi_a, \eta_a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\eta_a - b_a)^n}{n!} \delta_{a,\eta^n}^{(n)}(\xi_a, b_a). \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты в (15) вычисляем, рассматривая (6) как неявную функцию. При нахождении корней этим методом задача сводится к нахождению начального приближения $q_a^k(\xi_a, b_a)$ и b_a . Начальное приближение является решением уравнения $\Delta_a(q_a^k \xi_a, b_a) = 0$. При $b_2 = 0$ метод позволяет найти корень, который при $\eta_a \rightarrow 0$ переходит в решение для однородной среды. Этот корень будем называть первым. Из всех корней он обладает минимальной мнимой частью и определяет основное наблюдаемое затухание среднего поля.

Выражения для δ_a, c_a , отвечающие первому корню в линейном по η_a приближении, имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_a(\xi_a, \eta_a) &= \frac{a^{-1} \eta_a \xi_a^{\infty}}{2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Gamma_{a2}^{(\kappa)}(\xi_a) \xi_a^{2\kappa}; \\ c_a &= c_{a0} \left\{ 1 - \frac{\eta_a}{2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} [(1+2\kappa) + \xi_a \frac{d}{d\xi_a}] \Gamma_{a1}^{(\kappa)}(\xi_a) \xi_a^{2\kappa} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Раскладывая в (16) коэффициенты по степеням ξ_a , можем получить асимптотику длинных волн $\xi_a \ll 1$. Для нахождения асимптотики коротких волн надо использовать разложение $j_n(qr)$ по степеням $(qr)^{-1}$ [2]. В результате получим, что в отношении коротких волн стохастически неоднородная упругая среда ведет себя как однородная с коэффициентами $K^* = K_0 + \Gamma^{(0)}$, $\lambda_2^* = G_0 + \Gamma_2^{(0)}$. Соответственно в линейном по η_a приближении имеем

$$\begin{cases} \delta_a = k_a (1 + \eta_a \Gamma_{a2}^{(0)} \Lambda_{0a}^{-2}); \\ c_a = c_{a0} (1 + \eta_a \Gamma_{a1}^{(0)} \Lambda_{0a}^{-2}). \end{cases} \quad (17)$$

Алгоритм вычисления последовательных приближений корней дисперсионного уравнения имеет вид

$$q_a^{\kappa(n)2} = \xi_a^2 - q_a^{\kappa(n-1)2} \Lambda_a^{\kappa(n-1)2}, \quad (18)$$

где $q_a^{\kappa(n)}$ — n -е приближение κ -го корня.

Как и в методе решения разложением в ряды, известно начальное приближение для первого корня и проблема состоит в нахождении начальных приближений других корней. Из (18) в первом по η_a приближении получим (16).

Для применения метода приближений по корням разложим $K(q, \omega) \lambda_2'(q, \omega)$ по степеням Γ, Γ_2 , тогда уравнения (6) преобразуются к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} q_a^2 = k_a^2 - q_a^2 \Lambda_{0a}^{-1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} T_a^{(\kappa)} q_a^{2\kappa}; \quad T_1^{(\kappa)} = T^{(\kappa)} + 4/3 T_t^{(\kappa)}; \\ T_t^{(\kappa)} = \sum_{m=0}^{\kappa} \Gamma_t^{(m)} S_t^{(\kappa-m)}; \quad S_t^{(\kappa-m)} = \sum_{p=0}^{\infty} (N^t)^p C_{tp}^{(\kappa-m)}; \\ C_{tn}^{(\kappa)} = \frac{1}{n \Gamma_t^{(0)}} \sum_{p=1}^n (kp - n + p) \Gamma_t^{(p)} C_{tn-p}^{(\kappa)}. \end{array} \right. \quad (19)$$

$$T_{\kappa} = \sum_{m=0}^{\kappa} \Gamma^{(m)} S^{(\kappa-m)}; \quad S^{(\kappa-m)} = \sum_{p=0}^{\infty} (N^1)^p C_p^{(\kappa-m)};$$

$$C_n^{(\kappa)} = \frac{1}{n \Gamma^{(0)}} \sum_{p=1}^n (kp - n + p) \Gamma^{(p)} C_{n-p}^{(\kappa)}.$$

В нулевом (квадратном) приближении решение (19) имеет вид

$$q_a^2 = \frac{k_a^2}{1 + \Lambda_{0a}^{-1} T_a^{(0)}}; \quad T_t^{(0)} = \frac{\Gamma_t^{(0)}}{1 - N^t \Gamma_t^{(0)}};$$

$$T_1^{(0)} = 4/3 T_t^{(0)} + \Gamma^{(0)} (1 - N^1 \Gamma^{(0)})^{-1}.$$

В первом (биквадратном) приближении получаем

$$q_{a,1,2}^2 = (2A_a)^{-1} [-B_a \pm (B_a^2 - 4A_a D_a)^{1/2}];$$

$$A_a = 2T_a^{-1} \Lambda_{0a}^{-1}; \quad B_a = 1 + \Lambda_{0a}^{-1} T_a^{(0)};$$

$$D_a = k_a^2 T_a^{(1)} \Lambda_{0a}^{-1}; \quad T_1^{(1)} = T_t^{(1)} + 4/3 T^{(1)};$$

$$T_t^{(1)} = \Gamma_t^{(0)} S_t^{(1)} + \Gamma_t^{(1)} S_t^{(0)}; \quad T^{(1)} = \Gamma^{(0)} S^{(1)} + \Gamma^{(1)} S^{(0)}; \quad (20)$$

$$S_t^{(0)} = \sum_{p=0}^{\infty} (N^t)^p D_{tp}^{(0)}; \quad S_t^{(1)} = \sum_{p=0}^{\infty} (N^t)^p D_{tp}^{(1)};$$

$$S^{(0)} = \sum_{p=0}^{\infty} (N^1)^p D_p^{(0)}; \quad S^{(1)} = \sum_{p=0}^{\infty} (N^1)^p D_p^{(1)};$$

$$D_{tk}^{(1)} = k \Gamma_t^{(1)} (\Gamma_t^{(0)})^{\kappa-1}; \quad D_{\kappa}^{(1)} = k \Gamma^{(1)} (\Gamma^{(0)})^{\kappa-1}.$$

Переходя в (20) к пределу при $R_0 \rightarrow 0$, находим

$$q_{a1}^2 = k_a^2, \quad q_{a2}^2 = -\infty.$$

Таким образом, q_{a1} представляет собой первый (устойчивый) корень с минимальной мнимой частью. Корень q_{a3} соответствует второму (быстрозатухающему) собственному вектору в пределе нулевому. Нахождение второго корня разложением в ряды или последовательными приближениями связано с трудностью нахождения начального приближения. Уравнение (18) характерно тем, что в нем при q_a^2 в старших степенях стоит параметр η_a , и потому все корни начиная со второго при $R_0 \rightarrow 0$ не переходят в решение однородной задачи. Наблюдаемое затухание среднего поля обусловлено в основном первым корнем, другие корни дают быстро затухающие решения, однако их вклад в общий энергетический баланс может быть существенным. В некоторых задачах для нахождения макроскопических характеристик среды достаточно знать распределение корней дисперсионного уравнения [1,2], что также требует нахождения аналитических выражений для корней. Конкретный вид $\varkappa_a(\omega), \delta_a(\omega)$ позволяет делать выводы о характере проникновения плоской гармонической волны заданной частоты ω в случайно неоднородную среду. Это граничная задача. Если дисперсионное уравнение разрешить относительно частоты $\omega_a^2 = \Omega_a(\omega_a, q)$, считая q_a действительным, а $\omega_a = \omega_{a1} + i\omega_{a2}$, то в этом случае зависимость средних полевых величин от времени будет содержать экспоненциальный множитель, обуславливающий затухание во времени. Это соответствует решению начальной задачи [13]. Действительные части корней дисперсионных уравнений начальной и граничной задач связаны соотношением

$$\operatorname{Re} \Delta_a(\varkappa_a, \omega) = 0, \quad (21)$$

а мнимые

$$\delta_a = \omega_{a2} c_a^{-1}. \quad (22)$$

Здесь c_a — групповая скорость, вычисляемая согласно (8).

2. Для статистически изотропной однородной среды с корреляционной функцией $R(r) = R_0 \exp(-r/a)$ коэффициенты ряда (11) вычисляются явно, а сам ряд — гипергеометрический:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{na}^{pk} = R_0 \varkappa_a^{1-n+m-3} k_a^m Q_{na}^{mk}; \quad m = 2 + n - p; \\ Q_{na}^{mk} = \frac{k_a^{m+1} m! (a)_k (\beta)_k (-1)^k}{s_a^{2k+m+1} \varkappa_a^{m+1} (\gamma)_k k! (2n+1)!!}; \\ s_a = (1 - i\xi_a) a^{-1}; \quad \alpha = \frac{m+1}{2}, \quad \beta = \alpha + \frac{1}{2}; \quad \gamma = \frac{2n+3}{2}. \end{array} \right. \quad (23)$$

Соответственно (23) находим Γ_2^k , Γ в формулах (16)

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{(k)} &= 6(t^{(k)} + \gamma_2^{(k)}); \quad \Gamma^{(k)} = \frac{3}{2}(6t^{(k)} + 11\gamma_2^{(k)}); \\ t^{(k)} &= -\theta_t (P_{2t}^{3(k+2)} - iP_{2t}^{2(k+2)} - P_{1t}^{2k} k_t); \\ \gamma_2^{(k)} &= -2\theta_a [P_{4a}^{3(k+4)} - 3iP_{4a}^{4(k+4)} + 3P_{4a}^{5(k+4)} + 2P_{3a}^{4(k+2)} + \\ &+ 2ik_a P_{3a}^{3(k+2)} + P_{3a}^{3k}]_t^1; \quad \theta_a = k_a^{-3} \rho_0^{-1} c_{0a}^{-2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя известные рекуррентные формулы Гаусса для гипергеометрических функций [9, 12], коэффициенты P_{na}^k преобразуются так, что ряды суммируются и $\Lambda_a(q, \omega)$ выражаются через элементарные функции. Вычисление коэффициентов рассеяния и скоростей волн с учетом многократного рассеяния и точных выражений для гипергеометрических функций рассматривалось в [8, 9].

Рассмотрим приближенное суммирование гипергеометрических рядов P_{na}^p , Γ , Γ_2 , используя разложение коэффициентов Q_{na}^p , асимптотику $s_a^{-2} \approx 1 + 2 \ln \xi_a$ и полагая для наших случаев $(\alpha)_k (\beta)_k \approx (\gamma)_k k!$ Тогда

$$\begin{aligned} Q_{na}^{pk} &= \frac{\xi_a^{m+1} m! R_0}{\varkappa_a^{m+1} (2n+1)!!} [1 + i(2k+m+1)\xi_a]; \\ P_{na}^{pp} &= \frac{\xi_a^{m-2} m! R_0 \alpha}{\varkappa_a^n (2n+1)!!} [1 + i\xi_a(m+1+2\alpha)], \quad \alpha = [1 + (\alpha q)^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), а затем в (13), (6) с учетом (7), (8), получим выражения для $\varkappa_a(\omega)$, $c_a(\omega)$.

Границы используемого приближения определим, рассматривая асимптотику законов дисперсии для длинных и коротких волн.

Для длинных волн $\xi_a \ll 1$

$$\begin{aligned} \delta_a &= -\frac{k_a \Gamma_{a2}}{2\Lambda_{0a}}; \quad \chi_a = k_a q^{-1}; \\ c_a &= c_{a0} \left[1 + \frac{1}{2\Lambda_{0a}} \left(1 + \omega \frac{d}{d\omega} \right) (\Lambda_{0a} + \Gamma_{a1}) \right]; \\ \gamma_{21} &= -\frac{6\theta_a R_0}{9!! \chi_a \xi_a} (21 \chi_a^4 + 6\chi_a^2 + 1); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\gamma_{22} = - \frac{12\theta_a R_0}{9!! \chi_a^4} (42 \chi_a^4 + 18 \chi_a^2 + 5);$$

$$t_1 = - \frac{\theta_t R_0 (1 - 5 \chi_t^2)}{5!! \chi_t^2 \xi_t}; \quad t_2 = - \frac{2\theta_t R_0 (1 - 10\chi_t^2)}{5!! \chi_t^2}.$$

Из (26) следует, что $\delta_a \sim \omega^4$, $c_a \sim \omega^2$. Для коротких волн $\xi_a \gg 1$

$$\delta_a = - \frac{k_a}{2\Lambda_{0a}} \Lambda_a', \quad \Lambda_a = \Lambda_{a1} + i\Lambda_{a2};$$

$$c_a = c_{a0} \left[1 + \frac{1}{2\Lambda_{0a}} (1 + \omega \frac{d}{d\omega}) \Lambda_a' \right];$$

$$\gamma_{21} = - \frac{24\theta_a R_0 \xi_a (2 - \chi_a^2)}{9!! (aq)^2 \chi_a^4};$$

$$\gamma_{22} = - \frac{12\theta_a R_0 (21 \chi_a^4 + 14 \chi_a^2 + 4)}{9!! (aq)^2 \chi_a^4};$$

$$t_1 = - \frac{6\theta_t R_0 \xi_t}{5!! \chi_t^2 (aq)^2}; \quad t_2 = \frac{10\theta_t R_0}{5!! (aq)^2}.$$

Учитывая малость дисперсии R_0 в (27), рассмотрим случаи:

1. $\xi_a \eta_a < 1$, $\delta_a \sim \omega^2$, $c_a \sim c_{a0}$; 2. $\xi_a \eta_a < 1$
- $\delta_a \sim \omega^2$, $c_a \sim \omega^2$; 3. $\xi_a \eta_a \gg 1$, $q_a = \delta_a \sim \omega$,

распространяющих волн нет.

Таким образом, приближение (25) применимо в случае $\xi_a^2 \eta_a < 1$. В этом диапазоне длин волн и дисперсий полученные выражения аналогичны зависимостям δ_a , c_a от ω , найденные другими способами [3-6].

3. Для эталонной задачи с корреляционной функцией $R(r) = R_0 \exp(-r/a)$ дисперсионное уравнение является биквадратным, корни его находятся точно

$$\Delta = z^4 + z^2\beta - \xi^2\nu = 0; \quad \nu = (1 - i\xi)^2; \quad z = aq;$$

$$\xi = ak\lambda_0^{1/2}, \quad \eta = R_0; \quad \beta = \nu - \xi^2(1 + \eta);$$

$$z_{1,2}^2 = 2^{-1} (-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\nu\xi^2}).$$

При $R_0 \rightarrow 0$ $z_{1,2} \rightarrow \pm \xi$, $z_{3,4} \rightarrow (\xi + i)$.

Таким образом, собственные векторы, соответствующие корням, расположенным в 1,3 четвертях, переходят в незатухающие векторы однородной зада-

чи, а собственные векторы, соответствующие $q_{3,4}$, переходят в затухающие векторы.

Используя метод нахождения корней с помощью рядов k -го корня, из (28) получим

$$\begin{aligned} \alpha^k(\xi, \eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)}(\xi, 0)}{n!} \eta^n; \quad \delta^k(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{(n)}(\xi, 0)}{n!} \eta^n; \\ \alpha^{(0)} &= \pm (-1)^{k+1} \xi; \quad \alpha^{(1)} = \pm (-1)^{k+1} \xi^3 \mu 2^{-1}; \\ \alpha^{(2)} &= \pm (-1)^{k+1} 2\xi^5 (1 - 8\xi^2) \mu^2; \quad \mu = (1 + 4\xi^2)^{-1}; \\ \delta^{(0)} &= 0; \quad \delta_{1,2}^{(1)} = \xi^4 \mu; \quad \delta_{1,2}^{(2)} = \pm 2\xi^5 (5 - 4\xi^2) \mu^2; \\ \delta_{3,4}^{(0)} &= \pm 1; \quad \delta_{3,4}^{(1)} = \mp \xi^2 \mu (1 + 2\xi^2) 2^{-1}; \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (29) следует, что собственные векторы, соответствующие $q_{1,2}, q_{3,4}$, имеют $\text{Re} q_{1,2} = \text{Re} q_{3,4}$, а мнимые части различаются. Следовательно, скорости волн будут одинаковые, а затухание разное. Таким образом, хотя волн, распространяющихся в одном направлении, две, наблюдаются они как одна.

Для длинных волн $\xi \ll 1$

$$\begin{aligned} \delta_{1,2} &= \pm a^{-1} \xi^4 \eta; \quad \delta_{3,4} = \pm a^{-1} \left(1 - \frac{\xi^2 \eta}{2}\right); \\ c &= c_0 \lambda_0^{-1/2} \left(1 - \frac{\xi^2 \eta}{2}\right). \end{aligned}$$

Для коротких волн $\xi \gg 1$

$$\begin{aligned} \delta_{1,2} &= \pm \frac{a^{-1} \xi^2 \eta}{4}; \quad \delta_{3,4} = a^{-1} \left(1 - \frac{\xi^2 \eta}{4}\right); \\ c &= c_0 \lambda_0^{-1/2} \left(1 - \frac{\eta}{8}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Соотношения (30) в линейном по η приближении определяют диапазон значений ξ и η , в котором пригодны формулы (29). Из сопоставления результатов второго и третьего разделов получаем, что найденные приближения корней дисперсионных уравнений применимы в одних и тех же диапазонах изменения дисперсии и длин волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979. — 335 с.
2. Болотин В.В. О плотности параметрических резонансов. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 1087–1094.
3. Лифшиц И.М., Пархомовский Г.Д. К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах. — ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 2, с. 175–182.
4. Усов А.А., Шермергор Т.Д. Дисперсия скорости и рассеяние продольных ультразвуковых волн в композиционных материалах. — ПМТФ, 1978, № 3, с. 145–152.
5. Чигарев А.В. Распространение волн в стохастически неоднородной упругой среде. — Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4, с. 87–92.
6. Keller I.B. Wave propagation in random me-

dia. — Proc. Symp. Appl. Math., 1962, vol. 13, p. 116–131. 7. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978, ч. II. — 463 с. 8. Чигарев А.В. Распространение волн в упругой микронеоднородной среде. — Изв. АН СССР. МТТ. — 1980, № 4, с. 128–135. 9. Григорьев О.А., Шермергов Т.Д. Распространение ультразвуковых волн в поликристаллах кубической симметрии с учетом многократного рассеяния. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 2, с. 310–319. 10. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. — М.: Наука, 1975. — 415 с. 11. Чигарев А.В. Вычисление динамического тензора Грина стохастически неоднородной упругой среды. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 916–922. 12. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высш. шк., 1978. — 274 с. 13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. — 294 с.

УДК 539.3

Л.П. КНЯЗЕВА (БГУ)

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Рассматривается ортотропная упругая среда, имеющая три взаимно ортогональные плоскости симметрии. Линии пересечения этих плоскостей являются осями симметрии второго порядка и образуют кристаллографическую систему координат [1].

Компоненты тензора упругих постоянных в кристаллографической системе координат имеют вид

$$C_{ijkl} = \sum_{n=1}^3 [\lambda_n \delta_{in} \delta_{jn} \delta_{kn} \delta_{ln} + \mu_n (\delta_{in} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{ln} + \nu_n (\delta_{in} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{jn} \delta_{ik} \delta_{ln} + \delta_{ln} \delta_{ji} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{il} \delta_{kn}))]. \quad (1)$$

Упругие постоянные λ_i, μ_i, ν_i связаны с двухиндексными постоянными упругости C_{mn} следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = C_{11} + C_{23} + 2C_{44} - (C_{12} + C_{13} + 2C_{55} + 2C_{66}); \\ \lambda_2 = C_{22} + C_{13} + 2C_{55} - (C_{12} + C_{23} + 2C_{44} + 2C_{66}); \\ \lambda_3^* = C_{33} + C_{12} + 2C_{66} - (C_{13} + C_{23} + 2C_{44} + 2C_{55}); \\ 2\mu_1 = C_{12} + C_{13} - C_{23}; \\ 2\mu_2 = C_{12} + C_{23} - C_{13}; \\ 2\mu_3 = C_{13} + C_{23} - C_{12}; \\ 2\nu_1 = C_{55} + C_{66} - C_{44}; \\ 2\nu_2 = C_{44} + C_{66} - C_{55}; \quad 2\nu_3 = C_{44} + C_{55} - C_{66}. \end{array} \right. \quad (2)$$