

## ТЕРМОУПРУГИЙ ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассматриваются круглые пластины линейно-переменной толщины, срединная поверхность которых в недеформированном состоянии есть коническая поверхность большого угла раствора. Предполагается, что пластина свободно опирается по контуру и изгибается равномерно распределенной по ее поверхности нагрузкой в условиях неравномерного нагрева. Методом малого параметра исследуется влияние начальной кривизны пластины на распределение перемещений точек срединной поверхности по радиусу пластины. Приводятся результаты численных расчетов.

1. Исходные уравнения равновесия, описывающие симметричный изгиб пластин линейно-переменной толщины, имеют вид [1, 2]<sup>1</sup> :

$$\frac{d}{dr} (N_r r) - N_\theta + \frac{d}{dr} (Qr\varphi_0) + q_r r = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr} (Qr) - \frac{d}{dr} (N_r r\varphi_0) + q_z r = 0; \quad (2)$$

$$\frac{d}{dr} (M_r r) - M_\theta - Qr = 0, \quad (3)$$

где  $\varphi_0$  – угол между нормалью к срединной поверхности и ее осью, а усилия и моменты выражаются по формулам [3] :

$$N_r = A \left[ \frac{du}{dr} + \nu \left( \frac{u}{r} + \varphi_0 \frac{w}{r} \right) - (1 + \nu) \varepsilon_T \right]; \quad (4)$$

$$N_\theta = A \left[ \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} + \varphi_0 \frac{w}{r} - (1 + \nu) \varepsilon_T \right]; \quad (5)$$

$$M_r = -D \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} - (1 + \nu) \varkappa_T \right]; \quad (6)$$

$$M_\theta = -D \left[ \nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - (1 + \nu) \varkappa_T \right], \quad (7)$$

где  $u, w$  – компоненты вектора перемещения вдоль осей  $r$  и  $z$ ;  $A = \frac{Eh}{1 - \nu^2}$ ;  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ ;  $E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $\varepsilon_T, \varkappa_T$  – обобщенные чисто тепловые деформации [3].

---

<sup>1</sup>Уравнения (1) – (3) следует рассматривать как уточнение уравнений, положенных А.Д. Коваленко [3] в основу предложенной им теории изгиба круглых пластин переменной толщины.

Исключая из уравнений (1)–(3)  $Q_T$  с учетом (4)–(7), получаем разрешающую систему уравнений равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 & (1 + \varphi_0^2) \tilde{h} \rho \tilde{u}'' + [(1 + \varphi_0^2) \frac{d}{d\rho} (\tilde{h} \rho) + \varphi_0^2 \nu \tilde{h}] \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + [(1 + \varphi_0^2) \nu \frac{d\tilde{h}}{d\rho} - \\
 & - \frac{\tilde{h}}{\rho}] \tilde{u} + (1 + \varphi_0^2) \varphi_0 \nu \tilde{h} \tilde{w}' + [(1 + \varphi_0^2) \nu \varphi_0 \frac{d\tilde{h}}{d\rho} - \varphi_0 \frac{\tilde{h}}{\rho}] \tilde{w} - \\
 & - (1 + \varphi_0^2) (1 + \nu) \tilde{h} \rho \frac{d\tilde{\varepsilon}_T}{d\rho} - (1 + \nu) [(1 + \varphi_0^2) \rho \frac{d\tilde{h}}{d\rho} + \\
 & + \varphi_0^2 \tilde{h}] \tilde{\varepsilon}_T + \frac{(q_r - \varphi_0 q_z)}{A_1} \rho = 0;
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 & \tilde{p} \tilde{h}^3 \tilde{w}''' + (\tilde{h}^3 + 3\nu \tilde{h}^2 \tilde{h}') \tilde{w}'' + (3\nu \tilde{h}^2 \tilde{h}' - \tilde{h}^3) \tilde{w}' + 12\nu \varphi_0^2 \tilde{h} \tilde{w} + \\
 & + 12\varphi_0 \rho \tilde{h} \tilde{u}' + 12\varphi_0 \nu \tilde{h} \tilde{u} - (1 + \nu) \tilde{h}^3 \rho \tilde{\varepsilon}_T - (1 + \nu) 3\tilde{h}^2 \tilde{h}' \rho \varepsilon_T - \\
 & - 12(1 + \nu) \varphi_0 \rho \tilde{h} \varepsilon_T - \frac{12}{A_1} \int_0^\rho q_z \rho d\rho = 0,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $\tilde{u} = \frac{u}{a}$ ;  $\tilde{w} = \frac{w}{a}$ ;  $\tilde{h} = \frac{h}{a}$ ;  $\rho = \frac{r}{a}$ ;  $\tilde{\varepsilon}_T, \varepsilon_T = a\varepsilon_T$  – безразмерные переменные.

В случае свободного опирания пластины граничные условия имеют вид

$$M_r / \rho_{r=1} = 0; N_r / \rho_{r=1} = 0; \tilde{w} / \rho_{r=1} = 0; \frac{d\tilde{w}}{d\rho} / \rho_{r=0} = 0 \quad (1).$$

2. Поскольку в практических приложениях влияние температурного поля можно оценить на основе распределения чисто тепловых относительных удлинений срединной поверхности пластины и ограничивающих ее поверхностей [3], то тепловую деформацию задаем в виде:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{T0} + \frac{\varepsilon_{T1} + \varepsilon_{T2} - 2\varepsilon_{T0}}{6};$$

$$\varepsilon_T = \frac{1}{h} (\varepsilon_{T1} - \varepsilon_{T2}) = \frac{f}{h},$$

где  $\varepsilon_{T1}, \varepsilon_{T0}, \varepsilon_{T2}$  суть распределения тепловых удлинений на поверхностях

$z = \frac{h}{2}$ ;  $z = 0$ ;  $z = -\frac{h}{2}$ , которые удобно аппроксимировать полиномами вида [3]:

$$\varepsilon_{T1} = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{21} r^2 + \varepsilon_{31} r^3;$$

$$\varepsilon_{T0} = \varepsilon_{00} + \varepsilon_{20} r^2 + \varepsilon_{30} r^3;$$

$$\varepsilon_{T2} = \varepsilon_{02} + \varepsilon_{22} r^2 + \varepsilon_{32} r^3,$$

где  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2, 3$ ) – постоянные.

Пусть толщина пластинки меняется по закону

$$h = t [1 + \lambda (2\rho - 1)],$$

где  $t = \frac{h_0}{a}$ .

Используя геометрическую связь параметров  $\lambda$  и  $\varphi_0$  [1,2], решение задачи будем искать в виде

$$\tilde{u}(\rho) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \lambda^{\kappa} \tilde{u}_{\kappa}(\rho); \quad \tilde{w}(\rho) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \lambda^{\kappa} \tilde{w}_{\kappa}(\rho).$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $\tilde{u}_{\kappa}$ ,  $\tilde{w}_{\kappa}$  на основании (8) и (9) получаем системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} D_0(\tilde{w}_0) &= \frac{12\rho}{A_1 t^3} \int_0^{\rho} q_z \rho d\rho + \frac{1+\nu}{t} \rho^2 \frac{d\tilde{f}}{d\rho}; \\ F_0(\tilde{u}_0) &= (1+\nu) \rho^2 \frac{d\tilde{\varepsilon}_T}{d\rho}; \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_0(\tilde{w}_1) &= D_{11}(\tilde{w}_0) + D_{21}(\tilde{u}_0) + \frac{2(1+\nu)\rho^2}{t} [2\tilde{f} + (2\rho-1) \frac{d\tilde{f}}{d\rho}] + \\ &+ 12(1+\nu) \frac{\rho^2}{t} \tilde{\varepsilon}_T; \\ F_0(\tilde{u}_1) &= F_{11}(\tilde{u}_0) + F_{21}(\tilde{w}_0) + (1+\nu)\rho^2 [2\tilde{\varepsilon}_T + (2\rho-1) \frac{d\tilde{\varepsilon}_T}{d\rho}] + \frac{q_z}{A_1} \rho^2; \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} D_0(\tilde{w}_2) &= D_{11}(\tilde{w}_1) + D_{12}(\tilde{w}_0) + D_{21}(\tilde{u}_1) + D_{22}(\tilde{u}_2) + \\ &+ \frac{12(1+\nu)}{t} \rho^2 (2\rho-1) \tilde{\varepsilon}_T + \frac{(1+\nu)}{t} \rho^2 (2\rho-1) [4\tilde{f} + (2\rho-1) \frac{d\tilde{f}}{d\rho}]; \end{aligned} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} F_0(\tilde{u}_2) &= F_{11}(\tilde{u}_1) + F_{21}(\tilde{w}_1) + F_{12}(\tilde{u}_0) + F_{22}(\tilde{w}_0) + (1+\nu)t^2\rho \frac{d(\rho\tilde{\varepsilon}_T)}{d\rho}; \\ D_0(\tilde{w}_3) &= \sum_{i=1}^3 D_{1i}(\tilde{w}_{3-i}) + \sum_{i=1}^3 D_{2i}(\tilde{u}_{3-i}) - 4(1+\nu)t\rho^2 \tilde{\varepsilon}_T; \\ F_0(\tilde{u}_3) &= \sum_{i=1}^3 F_{1i}(\tilde{u}_{3-i}) + \sum_{i=1}^3 F_{2i}(\tilde{w}_{2-i}) - \frac{t^2 q_z}{3A_1} \rho^2 + \\ &+ (1+\nu)t^2 [(4\rho-1)\tilde{\varepsilon}_T + \rho(2\rho-1) \frac{d\tilde{\varepsilon}_T}{d\rho}], \end{aligned} \right. \quad (13)$$

где

$$D_0 = \rho^2 \frac{d^3}{d\rho^3} + \rho \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{d}{d\rho}; D_{11} = 3 \left\{ \rho^2 (1-2\rho) \frac{d^3}{d\rho^3} + \right.$$

$$\left. + \rho(1-4\rho) \frac{d^2}{d\rho^2} + [2(1-\nu)\rho - 1] \frac{d}{d\rho} \right\};$$

$$D_{12} = 3(1-2\rho) \left\{ -\rho^2 (1-2\rho) \frac{d^3}{d\rho^3} + \right.$$

$$\left. + \rho(6\rho - 1) \frac{d^2}{d\rho^2} + [2(2\nu - 1)\rho + 1] \frac{d}{d\rho} \right\} - 12\nu\rho;$$

$$D_{13} = (2\rho - 1)^2 \left\{ \rho^2 (1-2\rho) \frac{d^3}{d\rho^3} + (\rho - 8\rho^2) \frac{d^2}{d\rho^2} + \right.$$

$$\left. + [(2 - 6\nu)\rho - 1] \frac{d}{d\rho} \right\} + 12\nu(\rho - 2\rho^2); D_{21} = -\frac{12}{t} \left( \rho^2 \frac{d}{d\rho} + \nu\rho \right);$$

$$D_{22} = \frac{12}{t} (\rho - 2\rho^2) \left( \rho \frac{d}{d\rho} + \nu \right); D_{23} = 4t \left( \rho^2 \frac{d}{d\rho} + \nu\rho \right);$$

$$F_0 = \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + \rho \frac{d}{d\rho} - 1; F_{11} = (\rho^2 - 2\rho^3) \frac{d^2}{d\rho^2} + (\rho - 4\rho^2) \frac{d}{d\rho} +$$

$$+ [2(1-\nu)\rho - 1]; F_{12} = -t^2 \left[ \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + (1+\nu)\rho \frac{d}{d\rho} \right];$$

$$F_{13} = t^2 \left\{ (\rho^2 - 2\rho^3) \frac{d^2}{d\rho^2} - [2(2+\nu)\rho^2 - (1+\nu)\rho] \frac{d}{d\rho} - 2\nu\rho \right\};$$

$$F_{21} = t(1 - \nu\rho \frac{d}{d\rho});$$

$$F_{22} = t \left\{ \nu(\rho - 2\rho^2) \frac{d}{d\rho} + [2(1-\nu)\rho - 1] \right\}; F_{23} = -\frac{t^3}{3} (2\nu\rho \frac{d}{d\rho} + 1);$$

$$A_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \tilde{\varepsilon}_T, \tilde{f} = \tilde{h}\tilde{\varepsilon}_T - \text{безразмерные переменные.}$$

Граничные условия принимают вид:

$$\tilde{w}_\kappa''(1) + \nu \tilde{w}'_\kappa(1) = \begin{cases} L; \kappa = 0, 2, L = \frac{1+\nu}{t} \tilde{f}(1); \\ -L; \kappa = 1, 3; \\ -3 \sum_{i=1}^2 [\tilde{w}''_{\kappa-i}(1) + \nu \tilde{w}'_{\kappa-i}(1)] - [\tilde{w}''_{\kappa-3}(1) + \\ + \nu \tilde{w}'_{\kappa-3}(1)]; \kappa > 3; \end{cases} \quad (14)$$

$$\tilde{u}'_\kappa(1) + \nu \tilde{u}_\kappa(1) = \begin{cases} (1+\nu) \tilde{\varepsilon}_T(1); \kappa = 0; \\ 0; \kappa \neq 0; \end{cases}$$

$$\tilde{w}_\kappa(1) = 0; \quad \frac{d\tilde{w}_\kappa}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = O(1).$$

Последовательное интегрирование уравнений (10), (11), (12) с учетом граничных условий (14) приводит к следующим выражениям для  $\tilde{u}_k, \tilde{w}_k$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_0 = d_{10}\rho + \tilde{d}_{30}\rho^3 + \tilde{d}_{40}\rho^4; \\ \tilde{w}_0 = c_{00} + c_{20}\rho^2 + \tilde{c}_{40}\rho^4 + \tilde{c}_{50}\rho^5. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_1 = d_{11}\rho + \tilde{d}_{51}\rho^5 + \tilde{d}_{41}\rho^4 + \tilde{d}_{31}\rho^3 + \tilde{d}_{21}\rho^2 + \tilde{d}_{01}; \\ \tilde{w}_1 = c_{01} + c_{21}\rho^2 + \tilde{c}_{61}\rho^6 + \tilde{c}_{51}\rho^5 + \tilde{c}_{41}\rho^4 + \tilde{c}_{31}\rho^3; \\ \tilde{w}_2 = c_{02} + c_{22}\rho^2 + \tilde{c}_{72}\rho^7 + \tilde{c}_{62}\rho^6 + \tilde{c}_{52}\rho^5 + \tilde{c}_{42}\rho^4 + \tilde{c}_{32}\rho^3; \end{array} \right.$$

$$\tilde{d}_{30} = \frac{\varepsilon_2(1+\nu)}{4}; \quad \tilde{d}_{40} = \frac{1+\nu}{5} \varepsilon_3; \quad d_{10} = \frac{1}{1+\nu} [(1+\nu)(\varepsilon_0 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\nu+3)\tilde{d}_{30} - (\nu+4)\tilde{d}_{40}];$$

$$\tilde{c}_{40} = \frac{3}{16} B + \frac{f_2(1+\nu)}{16t}; \quad \tilde{c}_{50} = \frac{f_3(1+\nu)}{25t};$$

$$c_{00} = -\tilde{c}_{40} - \tilde{c}_{50} - c_{20}; \quad c_{20} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1+\nu}{t} (f_0 + f_2 + f_3) - 4(\nu+3)\tilde{c}_{40} - 5(\nu+4)\tilde{c}_{50} \right\};$$

$$\tilde{d}_{51} = \frac{1}{24} [-2(1,9+\nu)\tilde{d}_{40} + t(1-5\nu)\tilde{c}_{50} + 8(1+\nu)\varepsilon_3]; \quad \tilde{d}_{41} =$$

$$= \frac{1}{15} [-2(11+\nu)\tilde{d}_{30} + 15\tilde{d}_{40} + t(1-4\nu)\tilde{c}_{40} + 6(1+\nu)\varepsilon_2 - 3(1+$$

$$+\nu)\varepsilon_3]; \quad \tilde{d}_{31} = \frac{1}{8} [8\tilde{d}_{30} - 2(1+\nu)\varepsilon_2]; \quad \tilde{d}_{21} = \frac{1}{3} [Bt^3 - 2(1+\nu)d_{10} +$$

$$+ t(1-2\nu)c_{20} + 2(1+\nu)\varepsilon_0]; \quad \tilde{d}_{01} = -tc_{00};$$

$$d_{11} = \frac{1}{1+\nu} [-(\nu+5)\tilde{d}_{51} - (\nu+4)\tilde{d}_{41} - (\nu+3)\tilde{d}_{31} - (\nu+2)\tilde{d}_{21} - \nu\tilde{d}_{01}];$$

$$\tilde{c}_{61} = \frac{1}{144} [-30(\nu+19)\tilde{c}_{50} - \frac{12(\nu+4)}{t} \tilde{d}_{40} + \frac{16(1+\nu)}{t} f_3 +$$

$$+ \frac{12(1+\nu)}{t} \varepsilon_3];$$

$$\tilde{c}_{51} = \frac{1}{75} [-24(\nu+11)\tilde{c}_{40} + 225\tilde{c}_{50} - \frac{12(\nu+3)}{t} d_{30} + \frac{12(1+\nu)}{t} f_2 -$$

$$- \frac{6(1+\nu)}{t} f_3 + \frac{12(1+\nu)}{t} \varepsilon_2]; \quad \tilde{c}_{41} = \frac{1}{32} [96\tilde{c}_{40} - \frac{4(1+\nu)}{t} f_2];$$

$$\tilde{c}_{31} = \frac{1}{9} [-12(1+\nu)\tilde{c}_{20} - \frac{12(1+\nu)}{t} d_{10} + \frac{4(1+\nu)}{t} f_0 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{12(1+\nu)}{t} \varepsilon_0]; c_{21} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[ - \frac{(1+\nu)}{t} (f_0 + f_2 + f_3) - \right. \\
& - 6(\nu+5) \tilde{c}_{61} - 5(\nu+4) \tilde{c}_{51} - 4(\nu+3) \tilde{c}_{41} - 3(\nu+2) \tilde{c}_{31}]; c_{01} = \\
& = - (c_{21} + \tilde{c}_{61} + \tilde{c}_{51} + \tilde{c}_{41} + \tilde{c}_{31}); \tilde{c}_{72} = \frac{1}{245} [-36(\nu+29) \tilde{c}_{61} - \\
& - 12(11\nu+115) \tilde{c}_{50} - \frac{12(\nu+5)}{t} \tilde{d}_{51} - \frac{24(\nu+4)}{t} \tilde{d}_{40} + \\
& + \frac{20(1+\nu)}{t} f_3 + \frac{24(1+\nu)}{t} \varepsilon_3]; \tilde{c}_{62} = \frac{1}{144} [432 \tilde{c}_{61} - \\
& - 30(\nu+19) \tilde{c}_{51} - 12(9\nu+56) \tilde{c}_{40} + 60(\nu+19) \tilde{c}_{50} - \frac{12(\nu+4)}{t} \tilde{d}_{41} + \\
& + \frac{12(4+\nu)}{t} \tilde{d}_{40} + \frac{16(1+\nu)}{t} f_2 - \frac{16(1+\nu)}{t} f_3 + \frac{24(1+\nu)}{t} \varepsilon_2 - \\
& - \frac{12(1+\nu)}{t} \varepsilon_3 - \frac{24(\nu+3)}{t} \tilde{d}_{30}]; \tilde{c}_{52} = \frac{1}{75} [225 \tilde{c}_{51} - \\
& - 24(\nu+11) \tilde{c}_{41} + 48(\nu+11) \tilde{c}_{40} - 225 \tilde{c}_{50} - \frac{12(\nu+3)}{t} \tilde{d}_{31} + \\
& + \frac{12(\nu+3)}{t} \tilde{d}_{30} - \frac{12(1+\nu)}{t} f_2 + \frac{3(1+\nu)}{t} f_3 - \frac{12(1+\nu)}{t} \varepsilon_2]; \\
& \tilde{c}_{42} = \frac{1}{32} [96 \tilde{c}_{41} - 18(5+\nu) \tilde{c}_{31} - 12(4+5\nu) \tilde{c}_{20} - 96 \tilde{c}_{40} - \\
& - \frac{12(\nu+2)}{t} \tilde{d}_{21} - \frac{24(1+\nu)}{t} d_{10} + \frac{8(1+\nu)}{t} f_0 + \frac{2(1+\nu)}{t} f_2 + \\
& + \frac{24(1+\nu)}{t} \varepsilon_0]; \tilde{c}_{32} = \frac{1}{9} [-12(1+\nu) c_{21} + 27 \tilde{c}_{31} + 24(1+\nu) c_{20} - \\
& - \frac{12(1+\nu)}{t} \tilde{d}_{11} + \frac{12(1+\nu)}{t} d_{10} - \frac{4(1+\nu)}{t} f_0 - \frac{12(1+\nu)}{t} \varepsilon_0]; \\
& c_{22} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[ \frac{1+\nu}{t} (f_0 + f_2 + f_3) - 7(\nu+6) \tilde{c}_{72} - 6(\nu+5) \tilde{c}_{62} - \right. \\
& - 5(\nu+4) \tilde{c}_{52} - 4(\nu+3) \tilde{c}_{42} - 3(\nu+2) \tilde{c}_{32}]; \\
& c_{02} = - (c_{22} + \tilde{c}_{72} + \tilde{c}_{62} + \tilde{c}_{52} + \tilde{c}_{42} + \tilde{c}_{32}); \tilde{\varepsilon}_T = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 \rho^2 + \varepsilon_3 \rho^3; \\
& \tilde{f} = f_0 + f_2 \rho^2 + f_3 \rho^3; B = \frac{q_z}{A_1 t^3}.
\end{aligned}$$

На рис. 1,а приведен график распределения нормальных перемещений  $\tilde{w}(\rho)$  точек срединной поверхности при следующих значениях параметров задачи:  $\lambda = -0,4; -0,2; 0; 0,2; 0,4; t = 0,1; q_z = 0; \nu = 0,25; \varepsilon_0 = 26,815 \cdot 10^{-4}$ ;

$\epsilon_2 = 43,078 \cdot 10^{-7}$ ;  $\epsilon_3 = 28,135 \cdot 10^{-8}$ ;  $f_0 = 40,63 \cdot 10^{-4}$ ;  $f_2 = -13,29 \cdot 10^{-7}$ ;  $f_3 = -28,23 \cdot 10^{-8}$ . При этом в основу расчета положены трехчленные асимптотические формулы для  $\tilde{u}$  и  $\tilde{w}$ . Как показывают численные расчеты, учет начальной кривизны срединной поверхности может привести к поправке в 15 % к

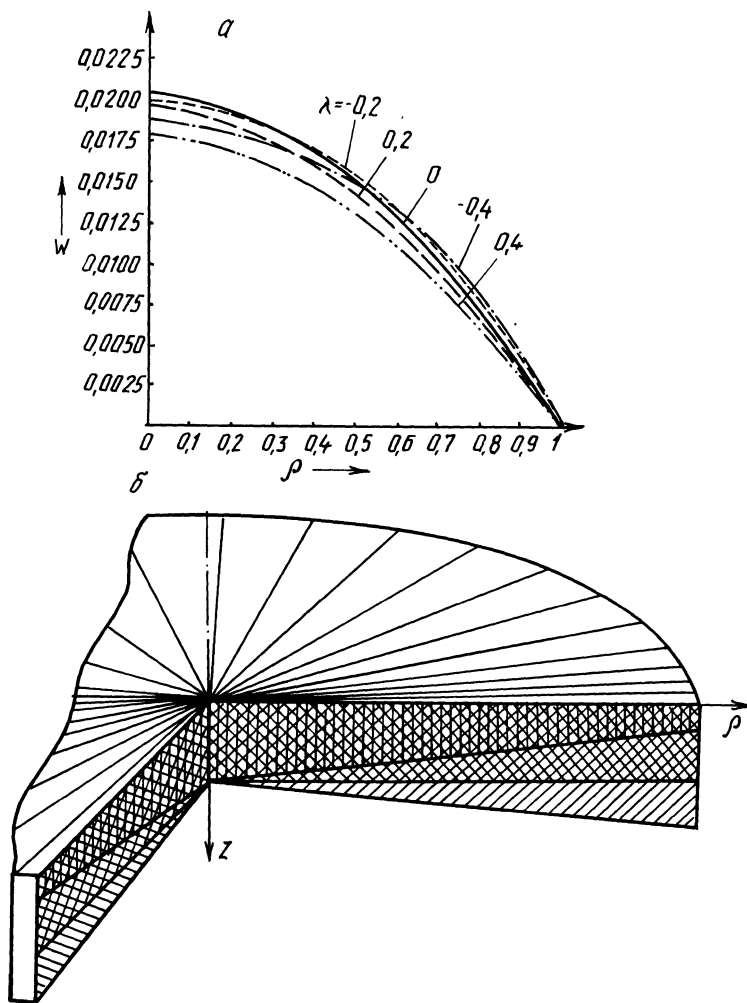


Рис. 1. Распределение  $w(\rho)$  по радиусу пластинки в зависимости от  $\lambda$  (а); профиль пластинки в зависимости от знака  $\lambda$  (б)

классическим формулам, получаемым в предположении, что срединная поверхность пластинки является плоскостью ( $\lambda = 0$ ). Этот факт является новым и служит основанием для критического пересмотра соответствующей рекомендации, содержащейся в монографии [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко М.Д., Ильинкова Н.И. Изгиб тонких круглых пластин переменной толщины. — Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1980, № 3, с. 17–24. 2. Мартыненко М.Д., Ильинкова Н.И. Изгиб свободно опертой пластинки переменной толщины с начальной кривизной срединной поверхности. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш. шк., 1983, вып. 10, с. 35–41. 3. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. — М.: Физматгиз, 1959. — 294 с. 4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. — М.: Наука, 1966. — 635 с.

УДК 534.22

А.В. ЧИГАРЕВ (БПИ)

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ДИНАМИКЕ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С УЧЕТОМ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Рассматривается решение дисперсионных уравнений стохастически неоднородной упругой среды с произвольной корреляционной функцией методом разложения в ряды коэффициентов рассеяния и скоростей волн с учетом многократного рассеяния. Рассмотрены также способы вычисления корней последовательными приближениями и приближением по степеням. Для экспоненциальной корреляционной функции рассмотрен способ приближенного суммирования гипергеометрических рядов, через которые выражаются скорости и коэффициенты рассеяния волн. Получена оценка границ такого решения. Для эталонной задачи можно получить точное решение уравнения, а также, разложив его в ряды, приближенное.

Вопросы нахождения собственных векторов, значений, распределений корней дисперсионных уравнений в задачах колебаний рассмотрены в работах [1–10]. Условия существования собственных векторов упругого оператора в виде средних плоских продольных и поперечных волн приводят к дисперсионным уравнениям относительно волновых чисел в граничной задаче или частот в начальной задаче. В общем случае дисперсионные уравнения являются трансцендентными или целыми функциями, поэтому корни находятся, как правило, приближенно. Исключение составляет эталонная задача, для которой уравнение решается точно. Основное значение имеет нахождение собственного вектора, соответствующего корню дисперсионного уравнения с минимальной мнимой частью (первый корень). Другие собственные векторы являются быстро затухающими. Во всех работах по распространению волн в случайно неоднородных средах рассматривается вычисление первого корня методом последовательных приближений и определение для соответствующего собственного вектора коэффициента рассеяния и скорости. В приближении однократного рассеяния задача рассматривалась в [3–6], с учетом многократного рассеяния в работах [7–10]. Решение приближением по корням рассмотрено в [10, 11].

1. Среднее поле перемещений  $\langle u_i \rangle$  гармонической волны в стохастически неоднородной упругой среде удовлетворяет уравнениям