

О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ КРУЧЕНИИ

Предлагается вариационный подход к отысканию оптимальных конфигураций сечения скручиваемых упругих тел, обеспечивающих их наибольшую несущую способность или минимальную массу. Показано, что необходимым условием оптимальности является выполнение принципа равнопрочности – равномерного распределения касательного напряжения на контуре границы сечения. Задачи оптимизации формы многосвязного сечения оказываются при этом эквивалентными вариационным принципам теории упругости, обобщенным на случай области с переменной границей, что представляет существенные преимущества для численной процедуры построения оптимальных проектов.

1. Отнесем напряженное состояние упругого цилиндра под действием приложенного к его торцам крутящего момента M к системе декартовых осей x_n ($n = 1, 2, 3$) с координатой x_3 , отсчитываемой вдоль оси цилиндра. Будем считать координаты безразмерными (умноженными на величину ϑ угла закручивания на единицу длины цилиндра) и обозначим через τ_{3i} ($i = 1, 2$) касательные напряжения, отнесенные к удвоенной величине упругого модуля сдвига G . Постановка задачи кручения для многосвязной области D поперечного сечения, ограниченной контурами S_k ($k = 0, 1, \dots, m$), имеет вид

$$\Delta F + 1 = 0 (D), \quad F = F_k(S_k; k = 0, \dots, m), \quad (1)$$

где $\Delta F = F_{,ii}$ – двумерный оператор Лапласа от функции Эри, определяющей напряжения $\tau_{13} = F_{,2} = \partial F / \partial x_2$, $\tau_{23} = -F_{,1} = -\partial F / \partial x_1$. Постоянные F_k определяются при этом с помощью теоремы о циркуляции напряжений

$$\int_{S_k} \frac{\partial F}{\partial n} ds = \omega_k V_k \quad (\omega_0 = -1; \omega_k = 1; k = 1, \dots, m). \quad (2)$$

Через S_0 в (1), (2) обозначен внешний контур, охватывающий остальные; V_k – площадь области D_k , ограниченной контуром S_k , так что площадь области D имеет вид

$$V = V_0 - \sum_{k=1}^m V_k = - \sum_{k=0}^m \omega_k V_k = - \sum_{k=0}^m \omega_k \int_{D_k} dv. \quad (3)$$

Безразмерный крутящий момент $\mu = M\vartheta^3 / 2G$ удобно задать в виде

$$\mu = \int_D F_{,i} F_{,i} dv \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Пусть $\{D\}$ – класс областей, допустимых по конструкционным или технологическим условиям; $\{F\}$ – класс соответствующих решений задачи (1), (2). Задача оптимального выбора формы области состоит в отыскании $D \in \{D\}$, $F \in \{F\}$, обеспечивающих наибольшее значение величины

$$\mu_* = \max \mu. \quad (5)$$

Податливость элементов конструкции обычно из конструктивных соображений ограничена, поэтому крутку \mathcal{V} можно считать известной и задача оптимизации по критерию (5) равносильна отысканию максимума истинного момента M .

В дальнейшем для определенности рассматривается класс областей с постоянными площадями концентраторов напряжений

$$V_k = V_k^0 \quad (k = 0, 1, \dots, m), \quad (6)$$

что соответствует условию постоянства площади сечения (3) и, следовательно, заданию массы цилиндра (при его фиксированной длине и равномерной плотности материала). При этом некоторые из контуров S_k , если это потребуется, можно считать неварьировемыми.

Альтернативная постановка задачи оптимизации состоит в отыскании минимальной площади сечения

$$V_* = \min V \quad (7)$$

среди всех конфигураций $\{D\}$, обладающих заданной несущей способностью

$$\mu = \mu_0. \quad (8)$$

В первой из указанных задач необходимо найти условный экстремум функционала (4) при уравнениях связи (1)–(3) для функции F . Пусть функционалы $P = \int_D f \, dv$, $Q = \int_S f \, ds$ определены на множестве $\{f\}$ функций $f(x_i) \in C_1(D)$ и областей $\{D\}$ с кусочно-гладкой границей $\{S\}$ ($D, S \subset D' \subset R_2$). Первые вариации функционалов с учетом вариации D, S имеют вид

$$\delta P = \int_D \delta f \, dv + \int_S f \, \delta n \, ds, \quad \delta Q = \int_S \left[\delta f + \left(\frac{\partial f}{\partial n} + \mathcal{A} f \right) \delta n \right] ds, \quad (9)$$

где $\delta f = f'(x_i) - f(x_i)$ – вариация функции в фиксированной точке x_i ; δn – расстояние вдоль нормали n_1 между точками A и A' исходной S и измененной S' границы (рис. 1); \mathcal{A} – кривизна линии S в точке x_i .

Согласно первой из формул (9) для функционала (4) имеем

$$\delta \mu = \int_S \left(2 \frac{\partial F}{\partial n} \delta F + F_{,i} F_{,i} \delta n \right) ds - 2 \int_D \Delta F \delta F \, dv. \quad (10)$$

Здесь и далее $S = S_0 + S_1 + \dots + S_m$.

Для первой из связей в (1) после несложных преобразований получаем

$$\delta \int_D \nu (\Delta F + 1) dv = \int_S \left(\nu \frac{\partial \delta F}{\partial n} - \frac{\partial \nu}{\partial n} \delta F \right) ds + \int_D \Delta \nu \delta F dv + \int_S \nu (\Delta F + 1) \delta n ds, \quad (11)$$

где $\nu(x_i)$ – неизвестный множитель Лагранжа; последнее из слагаемых в (11) согласно (1) при этом обращается в нуль. Аналогично, обозначая через $c_{1k}(x_i), c_{2k}(k=0, \dots, m)$ множители Лагранжа для уравнений связи на S_k в (1), (2) и используя вторую из формул (9), находим с учетом (6)

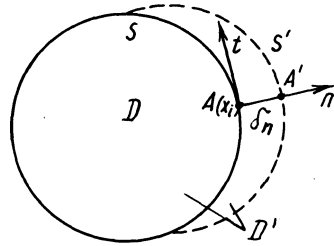


Рис. 1. Вариации формы упругих цилиндрических тел

$$\delta \int_{S_k} c_{1k} (F - F_k) ds = \int_{S_k} \left\{ c_{1k} (\delta F - \delta F_k) + c_{1k} \frac{\partial F}{\partial n} \delta n \right\} ds; \quad (12)$$

$$\delta \left(c_{2k} \int_{S_k} \frac{\partial F}{\partial n} ds - \omega_k V_k c_{2k} \right) = c_{2k} \int_{S_k} \left[\frac{\partial \delta F}{\partial n} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} + \alpha \frac{\partial F}{\partial n} - \omega_k \right) \delta n \right] ds.$$

Кроме того, вариации связей (6) с множителями c_{3k} будут

$$\delta \left(c_{3k} \int_{D_k} dv \cdot \omega_k \right) = - \omega_k c_{3k} \int_{S_k} \delta n ds, \quad (13)$$

где учтено, что нормаль n является внешней для области D_0 и внутренней для D_k ($k=1, \dots, m$).

Уравнения Эйлера и естественные краевые условия вариационной задачи с независимыми вариациями $\delta F, \partial \delta F / \partial n, \delta F_k (= \text{const}), \delta n$ на основании (10) – (13) и связей (1), (2), (6) запишутся соответственно

$$2\Delta F - \Delta \nu = 0 \text{ (D)}, \quad 2 \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{\partial \nu}{\partial n} + c_{1k} = 0, \quad \nu + c_{2k} = 0, \quad \int_{S_k} c_{1k} ds = 0; \quad (14)$$

$$F_{,i} F_{,i} + c_{1k} \frac{\partial F}{\partial n} + c_{2k} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} + \varkappa \frac{\partial F}{\partial n} \right) - \omega_k c_{3k} = 0 \quad (S_k, k=0, \dots, m). \quad (15)$$

Подчеркнем, что соотношения (15) справедливы для тех из контуров S_k , которые варьируются при решении задачи ($\delta n \neq 0$).

Из (1), (14) следует, что функция $h = 2F - \gamma$ — гармоническая в D и удовлетворяет краевым условиям

$$\int_{S_k} \frac{\partial h}{\partial n} ds = 0, \quad h = h_k = -c_{2k} - F_k \quad (k=0, \dots, m).$$

Последние могут выполняться лишь при постоянной в D функции $h(x_i)$. Действительно, из соотношения

$$\begin{aligned} \int_D h_{,i} h_{,i} dv &= \int_D [(hh_{,i})_{,i} - h\Delta h] dv = \int_S h \frac{\partial h}{\partial n} ds = \\ &= \sum_{k=0}^m h_k \int_{S_k} \frac{\partial h}{\partial n} ds = 0 \end{aligned}$$

с учетом неотрицательности выражения $h_{,i} h_{,i}$ следует, что $h_{,i} = 0$, и, следовательно, h — постоянная. Второе из условий (14) определяет тогда значения функций $c_{1k}(x_i)$ на S

$$c_{1k} = h_{,i} n_i = 0 \quad (k=0, 1, \dots, m). \quad (16)$$

Переходя в окрестности неособой граничной точки к локальной системе координат n, t (рис. 1), нетрудно убедиться, что уравнение Пуассона в (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} + \frac{1}{(1+n\varkappa)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \frac{n}{(1+n\varkappa)^3} \frac{\partial \varkappa}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial s} + \\ + \frac{\varkappa}{1+n\varkappa} \frac{\partial F}{\partial n} + 1 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Поэтому для $F \in C_2(D+S)$ в силу непрерывности оператора (17) и условия на S в (1) имеем на $\hat{S}_k(n=0)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} + \varkappa \frac{\partial F}{\partial n} = -1. \quad (18)$$

Согласно (16), (18) естественное краевое условие (15) вариационной задачи запишется

$$F_{,i} F_{,i} = c_k(S), \quad (19)$$

где $c_k = c_{2k} + c_{3k} \omega_k$ ($k=0, \dots, m$) — постоянные.

Левая часть (19) имеет смысл квадрата интенсивности касательных напряжений $\tau_{3i}; \tau_{3i}$, поэтому соотношение (19) является условием равнопрочности контуров S_k -равномерного распределения касательного напряжения τ_{3i} , равно (в силу условия $\partial F/\partial s = 0$ на S) величине $\sqrt{F_{,i} F_{,i}}$.

С позиций механики разрушения из приведенных рассуждений следует, что равнопрочная конфигурация тела обеспечивает наибольшую несущую способность по крутящему моменту среди всех конфигураций, удовлетворяющих критерию теории прочности

$$\max (\tau_{i3} \tau_{i3}) \leq (\tau_s / (2G))^2$$

с константой прочности $\tau_s = \max \sqrt{c_{,k}} (k = 0, \dots, m)$.

Таким образом, для оптимальности решения необходимыми являются условия равнопрочности (19) для варьируемых контуров из состава границы S . Указанные соотношения замыкают постановку задачи (1), (2) для определения функции напряжений F и неизвестных контуров S_k , поскольку число последних согласно замечанию к формуле (15) равно числу условий (19).

Применительно к плоскому напряженному состоянию пластин с концентраторами аналогичное условие было введено на эвристическом уровне в работе Г.П. Черепанова [1]; соответствующий экстремальный принцип доказан в [2].

Рассмотрим вторую постановку задачи – о минимизации площади (7) при заданном моменте (8). Варьирование функционала (3) согласно (9) дает

$$\delta V = - \sum_{k=0}^m \omega_k \int_{S_k} \delta n \, ds.$$

Вариации связей (1), (2) определяются формулами (11), (12). Вместо вариации (13) для связи (6) следует ввести вариацию условия (8) с левой частью (10) и дополнительным постоянным множителем Лагранжа a . Уравнения Эйлера и граничные условия запишутся в виде

$$2a \Delta F - \Delta \psi = 0 \text{ (D)}; \quad 2a \frac{\partial F}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} + c_{1k} = 0; \quad \psi + c_{2k} = 0;$$

$$\int_{S_k} c_{1k} \, ds = 0; \tag{20}$$

$$a F_{,i} F_{,i} + c_{1k} \frac{\partial F}{\partial n} + c_{2k} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} + \alpha \frac{\partial F}{\partial n} - \omega_k \right) - \omega_k = 0 \text{ (S)}.$$

Аналогично сказанному нетрудно показать, что функция $2aF - \psi$ является постоянной в D , поэтому следствием (20) по-прежнему являются условия равнопрочности контуров S_k (19) с постоянными $c_k = c_{2k} (1 + \omega_k) + \omega_k$. Поэтому задача оптимизации по критерию минимальной площади (массы) вновь приводит к требованию равнопрочности искомой формы сечения и эквивалентна в этом смысле задаче максимизации крутящего момента.

2. Рассмотренные в п. 1 вариационные постановки задачи оптимизации получены для класса $\{F\}$ точных решений задачи кручения, удовлетворяющих для каждой конфигурации из $\{D\}$ условиям (1), (2). Для приложений, однако, может оказаться целесообразным расширить множество $\{F\}$ допустимых решений за счет отказа от всех или части указанных условий и соответствующего видоизменения целевого функционала. Покажем, что в качестве последнего могут использоваться функционалы Кастильяно или Лагранжа с учетом переменной конфигурации области.

Функционал Кастильяно для цилиндра $W = \{(0 \leq x_3 \leq h) \times D\}$ высоты h , отнесенный к безразмерным координатам x_i , запишется [3]

$$I = \frac{2G}{\vartheta^3} \int_W \tau_{3i} \tau_{3i} dw - \frac{2G}{\vartheta^2} \int_{D_1 + D_2} \tau_{i3} n_3 u_i dv. \quad (21)$$

Здесь $D_1 = \{(x_3 = 0) \times D\}$; $D_2 = \{(x_3 = \vartheta h) \times D\}$ – торцы цилиндра, нагруженные усилиями, статистически эквивалентными закручивающему моменту; компоненты перемещения имеют вид

$$u_1 = -x_3 x_2 / \vartheta; \quad u_2 = x_3 x_1 / \vartheta, \quad u_3 = u_3(x_1, x_2), \quad (22)$$

где u_3 – заранее неизвестная деформация сечения.

Для функционала Кастильяно следует считать выполненным уравнение равновесия $\tau_{3i,i} = 0$, поэтому, вводя в (21) функцию напряжений F и учитывая (22), после несложных преобразований получим

$$I = \frac{2Gh}{\vartheta^2} I_0; \quad I_0 = \int_D (F_{,i} F_{,i} + F_{,i} x_i) dv. \quad (23)$$

Покажем, что необходимым условием стационарности функционала I_0 является требование равнопрочности контуров границы поперечного сечения D . Статически допустимые функции F должны при этом удовлетворять краевым условиям для напряжений

$$F = F_k(S_k), \quad \int_{S_k} (\partial F / \partial n) ds = \omega_k V_k \quad (k = 0, 1, \dots, m), \quad (24)$$

где, как и в п. 1, через S_k обозначены те из граничных контуров сечения, которые варьируются (при ограничениях (6)) в процессе решения.

Приравнявая нулю первую вариацию функционала (23),

$$\delta I_0 = \int_S \left[2 \frac{\partial F}{\partial n} + x_i n_i \right] \delta F + (F_{,i} F_{,i} + F_{,i} x_i) \delta n ds - \int_D (\Delta F + 1) \delta F dv$$

вместе с вариациями (12) связей (24) при условиях (6) получаем

$$\Delta F + 1 = 0 \quad (D), \quad 2 \frac{\partial F}{\partial n} + x_i n_i + c_{1k} = 0; \quad \int_{S_k} c_{1k} ds = 0; \quad c_{2k} = 0; \quad (25)$$

$$F_{,i} F_{,i} + F_{,i} x_i + c_{1k} \frac{\partial F}{\partial n} - c_{3k} \omega_k = 0 (S_k). \quad (26)$$

Второе и третье соотношения (25) вследствие равенства

$$\int_{S_k} x_i n_i ds = -2\omega_k \int_{D_k} dv = -2\omega_k V_k$$

и второго соотношения (24) удовлетворяются тождественно. Из первого уравнения (25) следует, что статически допустимое решение F удовлетворяет уравнению совместности деформаций и является истинным. Краевые условия (26) с помощью соотношений (25) и

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} = 0, F_{,i} x_i &= \frac{\partial F}{\partial n} x_i n_i = -2 \left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)^2 - c_{1k} \frac{\partial F}{\partial n} = \\ &= -2F_{,i} F_{,i} - c_{1k} \frac{\partial F}{\partial n} \end{aligned}$$

упрощаются в виде

$$F_{,i} F_{,i} + c_{3k} \omega_k = 0 (S_k),$$

совпадающим с точностью до значений постоянных с условиями равнопрочности (19).

Поэтому отыскание оптимального решения может осуществляться на основе вариационного принципа Кастильяно для функционала (23), что более удобно в отношении выбора класса статически допустимых функций F , не обязательно удовлетворяющих уравнению совместности из (1). Следует отметить, что выполнение уравнения (1) ускоряет сходимость численной процедуры построения решения; функционал I_0 совпадает в этом случае с функционалом момента (4).

Другая возможность уменьшения числа связей состоит во введении вместо (23) модифицированного функционала Кастильяно:

$$I_1 = \int_D (F_{,i} F_{,i} + F_{,i} x_i) dv - \sum_{k=0}^m c_k \omega_k V_k. \quad (27)$$

Уравнения (6) оказываются при этом излишними, и варьирование функционала (27) проводится при обычных условиях (24).

Выводы, аналогичные сделанным для функционала (23), сохраняются также для вариационного принципа Лагранжа с любым из функционалов

$$I = \int_W U dw - \int_{S_{T1}} T_i^* u_i ds, I_1 = I - \sum_{k=0}^m c_k \omega_k V_k,$$

где $U(e_{ij})$ — потенциал деформаций; S_{T1} — неварьируемая часть поверхности S с заданными усилиями T_i^* . Варьируемыми здесь являются часть S_2 границы

области и кинематически допустимое поле перемещений u_1 , определяемое для случая кручения формулами (22).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П., Ершов Л.В. Механика разрушения. – М.: Наука, 1976. – 244 с. 2. Ибрагимов В.А. О равнопрочных конфигурациях упругих пластин. – Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1983, № 4, с. 33. 3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

УДК 539.4:621.81

А.Х. КИМ, д-р техн.наук,
Н.Н. ФЛУСОВ (БПИ)

НАГРУЖЕНИЕ ЕДИНИЧНОГО ОТВЕРСТИЯ В ТРУБНОЙ ДОСКЕ

Исследования напряженного и деформированного состояний трубной доски, одного из основных элементов теплообменных аппаратов, как правило, проводятся с целью установления ее глобальных характеристик: приведенных модуля упругости E^* и коэффициента Пуассона ν^* , определяющих деформирование доски в целом. При этом нагрузка прикладывается на бесконечности. Между тем значительный с точки зрения и технологии, и прочности интерес представляет задача о нагружении трубной доски в одном единственном отверстии, например, завальцовка трубки. Только в случае использования взрывчатых веществ возможно одновременное закрепление нескольких трубок. Во всех остальных способах: ручная вальцовка, электрогидродинамическая и т. д. – участвует лишь одна трубка.

При высокой степени перфорации даже для случая треугольной решетки указанная задача, очевидно, не будет осесимметричной. Аналогичная картина наблюдается и для квадратной решетки. Кроме того, важным является и вопрос о деформируемости отверстий, расположенных вокруг нагружаемого отверстия.

Некоторое освещение перечисленных вопросов на основе численного решения плоской задачи теории упругости для трубной доски с треугольной решеткой перфорации и составляет содержание данной статьи. Приведем результаты решения следующих задач.

1. Оценка влияния количества соседних отверстий на радиальную деформацию основного отверстия;
2. Оценка влияния степени перфорации трубной доски на радиальное перемещение точек основного отверстия;
3. Деформируемость отверстий первого, второго и третьего рядов зависимости от степени перфорации трубной доски.

Расчет производился для элемента доски (рис. 1), находящейся в плоском деформированном состоянии ($E = 9,8 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,3$), с использованием метода граничных интегральных уравнений [1]. Выделение элемента проведено на основе учета условий симметрии. Таким образом, угол между прямолинейными боковыми сторонами составляет $\pi/6$. Центральное отверстие (0) нагруже-