

1. Романчик В.С., Князева Л.П. Напряженно-деформированное состояние кубически-анизотропного полупространства. В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1983, вып. 10, с. 41—47. 2. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. — М., 1981, с. 687. 3. Мартыненко М.Д., Князева Л.П., Романчик В.С. Давление абсолютно жесткого штампа на ортотропное полупространство в условиях сцепления. — В кн.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск, 1979, с. 156—161. 4. Dederichs P., Leibfried G. Elastic Green's Function for Anisotropic Cubic Crystals. — Phys. Review, 1969, v. 188, N 3, p. 1175—1183.

УДК 539.3

М.Д.МАРТЫНЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
НГО ХЫОНГ НЬЮ (БГУ)

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК¹

Дается решение задачи об определении толщины оболочки вращения, выполненной из разномодульного материала, при которой заданная внешняя нагрузка не вызывает изгибающих напряжений, а искомая толщина удовлетворяет условию тонких оболочек. Эти результаты следует рассматривать как продолжение работ [2], [3].

Определение толщины оболочки вращения в общем случае. Уравнения равновесия для оболочки вращения при отсутствии кручения имеют вид [4]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_s}{ds} + (T_s - T_\varphi) (\sin \theta / r) &= -X; \\ T_s / R_1 + T_\varphi / R_2 &= Z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Решая систему (1), получим при $\eta = \sec \theta$:

$$\left. \begin{aligned} T_s &= \frac{1}{r} \left[\int_{r_0}^r r \left(Z + \frac{X}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \right) dr + C \right] \eta; \\ T_\varphi &= r \eta Z + \left[\int_{r_0}^r r \left(Z + \frac{X}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \right) dr + C \right] \frac{d\eta}{dr}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Закон Гука для разномодульного материала в областях второго рода при отсутствии кручения имеет вид [1]:

¹ В настоящей работе рассмотрены точки в области второго рода, для точек и областей первого рода задача решается как для изотропного материала [3].

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= (T_s - \nu^+ T_\varphi) / hE^+; \\ \epsilon_\varphi &= (T_\varphi - \nu^- T_s) / hE^- \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Деформации ϵ_s (в направлении меридиана) и ϵ_φ (перпендикулярно к меридиану):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1}; \\ \epsilon_\varphi &= -u \sin \theta / r + w / R_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Так как внешняя нагрузка не вызывает в оболочке напряжений изгиба, то из равенства нулю изгибающих моментов следует равенство нулю изменения кривизны в меридиональной плоскости оболочки и в плоскости, перпендикулярной к меридиану. Поэтому [4]:

$$\begin{aligned} \kappa_s &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1} \right) = -\frac{1}{R_1} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\theta} - \frac{u}{R_1} \right) = 0; \\ \kappa_\varphi &= \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1} \right) = \frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\theta} - \frac{u}{R_1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения удовлетворяются, если

$$u = \frac{dw}{d\theta}. \quad (5)$$

Из уравнений (3) и (4), учитывая, что $\frac{1}{R_1} = \frac{d}{dr} \cos \theta$, $\frac{1}{R_2} = \frac{\cos \theta}{r}$ [4], получим:

$$-\sin \theta \frac{du}{dr} + w \frac{d}{dr} \cos \theta = \frac{1}{hE^+} (T_s - \nu^+ T_\varphi); \quad (6)$$

$$1/r (w \cos \theta - u \sin \theta) = 1/(hE^-) (T_\varphi - \nu^- T_s). \quad (7)$$

Из выражений (5) и (6)

$$\frac{d}{dr} (w \cos \theta - u \sin \theta) = \frac{1}{hE^+} (T_s - \nu^+ T_\varphi). \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8)

$$\frac{1}{hE^+} (T_s - \nu^+ T_\varphi) = \frac{d}{dr} r \left\{ \frac{1}{hE^-} (T_\varphi - \nu^- T_s) \right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} &= \frac{1}{r} + \frac{1}{T_\varphi - \nu^- T_s} \frac{d}{dr} (T_\varphi - \nu^- T_s) - \\ &- \frac{E^-}{E^+} \frac{(T_s - \nu^+ T_\varphi)}{r (T_\varphi - \nu^- T_s)}. \end{aligned}$$

Решая последнее уравнение, получим формулу, определяющую толщину оболочки как функцию от r ,

$$h(r) = h_0 \frac{r}{r_0} \left| \frac{T_\varphi^- \nu^- T_s^0}{T_\varphi^0 - \nu^- T_s^0} \right| \exp \left\{ - \frac{E^-}{E^+} \int_{r_0}^r \frac{T_s - \nu^+ T_\varphi}{r (T_\varphi - \nu^- T_s)} dr \right\}, \quad (9)$$

где T_φ^0, T_s^0, h_0 — значения T_φ, T_s, h при $r = r_0$.

Формула (9) справедлива только для точек и областей второго рода [1]. Поэтому при ее применении нужно проверять выполнение условий:

а) $T_s T_\varphi < 0$;

б) для тонких оболочек $|h(r)/r| \leq 1/10$.

Определение толщины открытой полусферической оболочки. Для сферической оболочки радиуса R имеем: $\eta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{R}{r}$; $\frac{d\eta}{dr} = -\frac{R}{r^2}$.

Пусть дуга s отсчитывается от $r_0 = R$ до $r = r_1$. Тогда усилия (2) будут:

$$T_s = \frac{R}{r^2} \left(Z \frac{r^2 - R^2}{2} - X \frac{R^2}{2} (\arccos \frac{r}{R} + \frac{r}{R} \sqrt{1 - (\frac{r}{R})^2}) + C \right);$$

$$T_\varphi = RZ - T_s.$$

Подставляя эти усилия в формулу (9) и вычисляя интеграл, входящий в нее, получим точные решения исходной задачи в следующих случаях.

1. На торце обложки ($r_0 = R$) действуют равномерно распределенные силы, параллельные оси вращения T_s^0 , а условие закрепления другого торца не нарушает ее безмоментного состояния. Тогда: $X = 0$; $Z = 0$; $T_s = R^2/r^2 \cdot T_s^0$; $T_\varphi = -R^2/r^2 \cdot T_s^0$.

Заметим, что $T_s T_\varphi < 0$ для всех r . Это означает, что вся оболочка — область второго рода и можно применить формулу (9) для вычисления толщины:

$$h(r) = h_0(r/R) |r/R| \frac{E^-}{E^+} \frac{1+\nu^+}{1+\nu^-} - 2.$$

Очевидно, что условия тонких оболочек $|h(r)/r| \leq 1/10$ удовлетворены для всех r , если исходные геометрические параметры и механические постоянные удовлетворяют условиям $|h_0/R| \leq 1/10$ и $E^- (1+\nu^+) / [E^+ (1+\nu^-)] - 2 > 0$.

2. Оболочка загружена равномерно распределенной по поверхности нормальной нагрузкой q и равномерно распределенными по краям силами, параллельными оси вращения T_s^0 .

В этом случае $Z = q, X^s = 0$,

$$\left. \begin{aligned} T_s &= R/r^2 q ((r^2 - R^2)/2) + T_s^0; \\ T_\varphi &= Rq - T_s. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Подставим эти усилия в формулу (9) и после некоторых преобразований вычислим в ней интеграл. Получим:

$$h(r) = h_0 \frac{r}{R} \left| \frac{Rq(1-\nu^-) - (1+\nu^-) 2T_s^0}{2[Rq - (1+\nu^-) T_s^0]} \right| \left| \frac{r^2 - B}{r^2} \right| \times \\ \times \left| \frac{r}{R} \right| \left| \frac{E^-}{E^+} \nu^+ + \frac{A}{B} \right| \left| \frac{r^2 - B}{R^2 - B} \right| \left| \frac{B-A}{2B} \right|^{CD}; \quad (11)$$

$$A = \frac{R^3 q}{Rq + 2T_s^0}; B = \frac{R^3 q(1+\nu^-)}{Rq(1-\nu^-) - (1+\nu^-) 2T_s^0}; C = \frac{Rq + 2T_s^0}{(1-\nu^-) Rq - (1+\nu^-) 2T_s^0};$$

$$D = - \frac{E^-}{E^+} \nu^+ \left(\frac{1}{\nu^+} - \nu^- \right).$$

Формула (11) применяется только в областях, где выполняются условия: а) $T_s T_\phi < 0$ и б) $|h(r)/r| \leq 1/10$. Подставляя выражения (10) и (11) в эти неравенства и решая их совместно, определим, что толщина полусферической разномодульной оболочки вычисляется по формуле (11) при $q = \text{const} > 0$ в случае, если исходные силовые механические и геометрические параметры удовлетворяют условию $T_s^0 > Rq/(1+\nu^-)$, $R^2 > r^2 > R^3 q/(2T_s^0 - Rq)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И с а б е к я н Н.Г. Безмоментная теория облочек, изготовленных из анизотропного разномодульного материала. — Изв. АН Арм. СССР. Механика, 1969, т. 22, № 6, с. 22–37.
2. М а р т ы н е н к о М.Д. Определение безмоментной формы оболочки под действием заданной внешней нагрузки. — В сб.: Вопросы математической физики и теории функций. Киев, 1964, с. 91–96.
3. М а р т ы н е н к о М.Д. Об одной задаче безмоментной теории оболочек вращения, находящихся в температурном поле. — Докл. АН БССР, 1972, т. 16, № 6, с. 499–501.
4. А м б а р ц у м я н С.А. Теория анизотропных оболочек. — М., 1966. — 384 с.

УДК 539.3

А.Е. КРУШЕВСКИЙ, канд. техн. наук,
Н.Я. ЛУЦКО (БПИ)

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА И ПАКЕТА ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ЭВМ

На базе численных и аналитических вариационных методов расчета конструкций создаются универсальные алгоритмы и программы реализации их на ЭВМ, например, программа на основе метода конечных элементов "Прочность" (Киевский инженерно-строительный институт), программы на основе модифицированного метода Трефтца (БПИ) [1].