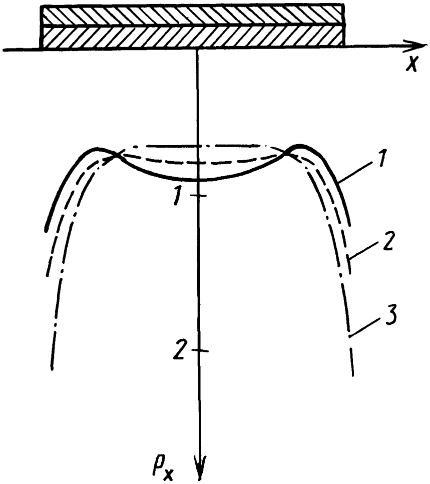

Рис. 1. Графики распределения реактивного давления под балкой при расположении ее нейтральной оси:
1 — в верхнем слое; 2 — на линии раздела слоев; 3 — в нижнем слое

гие свойства основания выбирались постоянными для всех рассматриваемых случаев. Различного положения нейтральной оси добивались соответствующим выбором упругих модулей слоев. Расчеты показывают, что распределение реактивных давлений существенно зависит от упругих характеристик слоев балки (см. рис. 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко М.Д., Свирский Е.А. Изгиб балки на нелинейной полуплоскости с учетом смятия ее по толщине. — Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат.навук. 1982, № 4, с. 33–38. 2. Королев В.И. Упругопластические деформации оболочек. — М., 1971. — 303 с. 3. Муштари Х.М. Теория изгиба плит средней толщины. — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1959, № 2, с. 107–113. 4. Габдулхаев Б.Г., Душков П.Н. О полигональном методе решения интегральных уравнений со слабой особенностью. — В кн.: Приложение функционального анализа к приближенным вычислениям. — Казань, 1974, с. 37–57.

УДК 539.3

Л.П.КНЯЗЕВА, канд. физ.-мат.наук,
В.С.РОМАНЧИК, канд.физ.-мат. наук (БГУ)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КУБИЧЕСКИ-АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

Для оценки достоверности результатов [1] была рассмотрена возможность решения граничных задач для кубически-анизотропной среды методом малого параметра. Задача сводится к системам интегральных уравнений, ядра которых — известные аналитические функции.

Запишем систему уравнений равновесия упругого тела в виде:

$$\Delta u_i + \frac{a}{C_{44}} \frac{\partial e}{\partial x_i} - \epsilon \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + X_i = 0, i = \overline{1,3}; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} & u_i (x) |_{S_u} = f_i (x); \\ & t_i^{(n)} (x) |_{S_б} = \varphi_i (x), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $a = C_{12} + C_{44}$; $\epsilon = (C_{11} - C_{12} - 2C_{44})/C_{44}$; $e = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$; $S = S_u \cup S_\sigma$ — замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая тело; $t_i^{(n)}(x) = (C_{12}e - d\frac{\partial u_i}{\partial x_i})n_i + C_{44}\sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})n_j$; X_i —компонента вектора объемных сил; $d = C_{12} + 2C_{44} - C_{11}$.

Представим решение уравнений (1) — (2) в виде ряда по малому параметру ϵ

$$u_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k u_i^{(k)}(x). \tag{3}$$

Отметим, что в [4] установлена область слабой и сильной анизотропии для большого числа материалов, т.е. фактически определены границы малости параметра ϵ.

После подстановки решения (3) в уравнения (1) — (2) придем к последовательности задач относительно $u_i^{(k)}(x)$:

$$C_{44}\Delta u_i^{(0)} + a\frac{\partial e^{(0)}}{\partial x_i} + X_i = 0 \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} &u_i^{(0)}(x)|_{S_u} = f_i(x); \\ &t_i^{(n)(0)}(x)|_{S_\sigma} = \varphi_i(x) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

для определения нулевого приближения $u_i^{(0)}(x)$ и к системе

$$C_{44}\Delta u_i^{(k)} + a\frac{\partial e^{(k)}}{\partial x_i} = C_{44}\frac{\partial^2 u_i^{(k-1)}}{\partial x_i^2} \tag{6}$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} &u_i^{(k)}(x)|_{S_u} = 0; \\ &t_i^{(n)(k)}(x)|_{S_\sigma} = C_{44}\frac{\partial u_i^{(k-1)}}{\partial x_i} n_i \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

для определения $u_i^{(k)}(x)$.

Здесь $t_i^{(n)(k)}(x) = C_{12}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_j} + C_{44}\sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i})n_j$, $k = 0, 1, 2...$

Используя интегральное представление решения (4) — (7) второй основной задачи для изотропной среды с упругими постоянными $\lambda = C_{12}$, $\mu = C_{44}$ (с помощью тензора Грина) получим:

$$u_i^{(0)}(x)=\int\limits_{S_u}\sum_{j=1}^{3}G_{ij}(x-y)p_j^{(0)}(y)\,ds(y)+\int\limits_{S_\sigma}\sum_{j=1}^{3}G_{ij}(x-y)\varphi_j(y)\,ds(y)+$$

$$+\int\limits_{V}\sum_{j=1}^{3}G_{ij}(x-y)X_j(y)\,dv(y);$$

$$u_i^{(k)}(x)=\int\limits_{S_u}\sum_{j=1}^{3}G_{ij}(x-y)p_j^{(k)}(y)\,ds(y)+$$

$$+C_{44}\int\limits_{S_\sigma}\sum_{j=1}^{3}G_{ij}(x-y)\frac{\partial u_j^{(k-1)}(y)}{\partial y_j}n_j\,ds(y)+C_{44}\int\limits_{V}\sum_{j=1}^{3}G_{y}(x-y)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 u_j^{(k-1)}}{\partial y_j^2}\,dv(y).$$

Переходя в этих представлениях к пределу при $x\to S$, получаем систему интегральных уравнений первого рода относительно $p_j^{(0)}\equiv t_j^{(n)\,(0)}(x)$ и $p_j^{(k)}\equiv t_j^{(n)\,(k)}(x)$ на S_u:

$$\int\limits_{S_u}\sum_{j=1}^{3}G_{ij}(x-y)p_j^{(k)}(y)\,ds(y)=\Phi_i^{(k)}(x),\quad k=0,1,2...,$$

$$\Phi_i^{(0)}(x)=f_i(x)-\int\limits_{S_\sigma}\sum_{j=1}^{3}G_{ij}(x-y)\varphi_j(y)\,ds(y)-$$

$$-\int\limits_{V}\sum_{j=1}^{3}b_{ij}(x-y)X_j(y)dv(y);$$

$$\Phi_i^{(k)}(x)=-G_{44}\int\limits_{S_\sigma}\sum_{j=1}^{3}G_{ij}(x-y)\frac{\partial u_j^{(k-1)}(y)}{\partial y_j}n_j\,ds(y)-$$

$$-C_{44}\int\limits_{V}\sum_{j=1}^{3}G_{ij}(x-y)\frac{\partial^2 u_j^{k-1}(y)}{\partial y_j^2}\,dv(y).$$

В качестве примера рассмотрим задачу об упругом равновесии кубически-анизотропного полупространства $\eta x_3\geqslant 0$ при следующих условиях на границе:

$$u_i(x)\,|_{S_u}=f_i(x);\quad \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(x)n_j|_{S_\sigma}=\sigma_{i3}(x)\,|_{S_\sigma}=0.$$

Эта задача описывается системой интегральных уравнений ($n=0{,}0{,}1$, объемные силы отсутствуют)

$$\int\limits_{S_u}\sum_{j=1}^{3}G_{ij}^{(0)}(x-y)p_j^{(0)}(y)\,ds(y)=f_i(x);\tag{8}$$

$$\int\limits_{S_u} \sum_{j=1}^{3} G_{ij}^{(0)}(x-y)p_j^{(k)}(y)\,ds(y) = -C_{44}\int\limits_{S_\sigma} G_{i3}^{(0)}(x-y)\frac{\partial u_3^{(k-1)}(y)}{\partial y_3}\,ds(y) -$$

$$-C_{44}\int\limits_{V}\sum_{j=1}^{3} G_{ij}^{(0)}(x-y)\frac{\partial^2 u_j^{(k-1)}(y)}{\partial y_j^2}\,dv(y). \qquad (9)$$

Система (8) — (9) имеет одинаковую левую часть для каждого k, что позволяет получать очередное $(k+1)$-е приближение перемножением обратного оператора на вычисленную на k-м шаге функцию правых частей. При решении системы алгебраических уравнений, соответствующих интегральным, прямой ход метода Гаусса выполняется один раз при $k = 0$, а для $k = 1, 2...$ выполняется только обратный ход метода Гаусса. Вычисление объемного интеграла, входящего в правую часть (9), производилось как численно (сведением бесконечной области к параллелепипеду), так и на основании метода Гаусса, сводящего объемный интеграл к поверхностному [2].

Аналогичные результаты получаются при разложении фундаментальных решений уравнений равновесия кубически-анизотропной среды в ряд по степеням ϵ:

$$U_{ij}(x-y) = \sum_{a=0}^{\infty} \epsilon^a U_{ij}^{(a)}(x-y);$$

$$T_{ij}(x-y) = \sum_{a=0}^{\infty} \epsilon^a T_{ij}^{(a)}(x-y).$$

Представляя компоненты вектора перемещений и напряжений в виде $u_i(x) = \sum_{a=0}^{\infty} \epsilon^a u_i^{(a)}(x)$; $p_i(x) = \sum_{a=0}^{\infty} \epsilon^a p_i^{(a)}(x)$, из решения в интегральной форме получим:

$$u_i^{(k)}(x) - \int\limits_{S} \sum_{j=1}^{3} \left(U_{ij}^{(0)}(x-y)p_j^{(k)}(y) - T_{ij}^{(0)}(x-y)u_j^{(k)}(y)\right)ds(y) =$$

$$= \Phi_i^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, 2... \qquad (10)$$

Здесь $\Phi_i^{(0)}(x) = 0$; $\Phi_i^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{k-1} \int\limits_{S} \sum_{j=1}^{3} (U_{ij}^{(k-l)}(x-y)p_j^{(l)}(y) + T_{ij}^{(k-l)}(x-y)\,u_j^{(l)}(y))ds(y)$, $k = 1, 2, ...$; $U_{ij}^{(0)}(x-y)$; $T_{ij}^{(0)}(x-y)$ — фундаментальные решения для изотропного случая.

Переходя в формуле (10) к пределу при $x \to S$, на основании граничных условий получим последовательность систем интегральных уравнений для $k = 0, 1, 2$...Некоторое преимущество такого подхода состоит в исключении необходимости вычислять объемный интеграл для каждого k.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р о м а н ч и к В.С., К н я з е в а Л.П. Напряженно-деформированное состояние кубически-анизотропного полупространства. В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1983, вып. 10, с. 41–47. 2. П а р т о н В.З., П е р л и н П.И. Методы математической теории упругости. — М., 1981, с. 687. 3. М а р т ы н е н к о М.Д., К н я з е в а Л.П., Р о м а н ч и к В.С. Давление абсолютно жесткого штампа на ортотропное полупространство в условиях сцепления. — В кн.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск, 1979, с. 156–161. 4. D e d e r i c h s P., L e i b f r i e d G. Elactic Green's Function for Anisotropic Cubic Crystals. — Phys. Review, 1969, v. 188, N 3, p. 1175–1183.

УДК 539.3

М.Д.МАРТЫНЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
НГО ХЫОНГ НЬЮ (БГУ)

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК[1]

Дается решение задачи об определении толщины оболочки вращения, выполненной из разномодульного материала, при которой заданная внешняя нагрузка не вызывает изгибающих напряжений, а искомая толщина удовлетворяет условию тонких оболочек. Эти результаты следует рассматривать как продолжение работ [2], [3].

Определение толщины оболочки вращения в общем случае. Уравнения равновесия для оболочки вращения при отсутствии кручения имеют вид [4]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dT_s}{ds} + (T_s - T_\varphi)(\sin\theta/r) = -X; \\ &T_s/R_1 + T_\varphi/R_2 = Z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Решая систему (1), получим при $\eta = \sec\theta$:

$$\left.\begin{aligned} &T_s = \frac{1}{r}\left[\int_{r_0}^{r} r\left(Z + \frac{X}{\sqrt{\eta^2-1}}\right)dr + C\right]\eta; \\ &T_\varphi = r\eta Z + \left[\int_{r_0}^{r} r\left(Z + \frac{X}{\sqrt{\eta^2-1}}\right)dr + C\right]\frac{d\eta}{dr}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Закон Гука для разномодульного материала в областях второго рода при отсутствии кручения имеет вид [1]:

---

[1] В настоящей работе рассмотрены точки в области второго рода, для точек и областей первого рода задача решается как для изотропного материала [3].