

Все три системы (7) легко разрешимы относительно неизвестных.

Если обозначить миноры в разложении определителя

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 1 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & 1 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & 1 \end{vmatrix}$$

по k -му столбцу через M_k^j , где j — номер строки, то для компонентов тензора деформаций и параметров Родрига в случае малых деформаций и поворотов получим

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ii} &= \frac{1}{6\nu} \sum_k M_i^k \Delta x_i^k; \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{6\nu} \sum_k (M_i^k \Delta x_j^k + M_j^k \Delta x_i^k); \\ 2\lambda_{e0} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6\nu} \sum_k (M_m^k \Delta x_n^k - M_n^k \Delta x_m^k) \right], \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$i, j, l, m, n = 1, 2, 3.$

Если в соотношении (5) удержать квадраты параметров Родрига, то аналогично выражениям (8) можно получить компоненты тензора конечных деформаций. Преобразуя все векторы (Δx_i^{N1}) и (x_i^{N1}) к произвольным осям, получим соотношение типа (8) для общего случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А.И. Аналитическая механика. — М., 1961. — 824 с. 2. О д е н Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М., 1976. — 464 с. 3. Т р у с д е л л К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М., 1975. — 520 с.

УДК 539.3

М.Д.МАРТЫНЕНКО, д-р физ.-мат.наук,
А.И.ПРУСОВ, Е.А.СВИРСКИЙ, канд. физ.-мат.наук (БГУ)

ИЗГИБ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ БАЛКИ НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача об изгибе свободно опертой биметаллической балки на упругой полуплоскости с учетом ее сжатия (смятия) по высоте. Балка толщиной $2h$ находится в равновесии под действием нормальной нагрузки $q(x)$ и реакции (отпора) основания $p(x)$, приложенных к плоскостям $z = \pm h$. Толщина первого слоя h_1 , а его упругие постоянные E_1 и ν_1 . Соответственно для второго слоя толщина h_2 и упругие постоянные E_2 и ν_2 . Трением между балкой и полуплоскостью будем пренебрегать.

Работа посвящена выводу и решению интегрального уравнения для нахождения реактивного давления на биметаллическую балку со стороны упругой полуплоскости. Схема решения этой задачи такая же, как и в работе [1]. При исследовании изгиба двухслойной балки будем следовать работе [2], определяя приведенную нейтральную поверхность. Нейтральная поверхность двухслойной балки всегда располагается между граничными поверхностями и находится в верхнем слое, если $E_1 h_1^2 > E_2 h_2^2$, в нижнем слое, если $E_1 h_1^2 < E_2 h_2^2$, и совпадает с поверхностью раздела слоев, если $E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2$. Расстояние между нейтральной и нижней граничной поверхностями $z_0 = (E_1 h_1^2 + 2E_1 h_1 h_2 + E_2 h_2^2) / (2(E_1 h_1 + E_2 h_2))$.

Для снятия каждого слоя имеем:

$$w_{\text{см}}^{(1)} = h_1 k_1 / 2 (q + R), w_{\text{см}}^{(2)} = h_2 k_2 / 2 (p + R),$$

где $q(x)$ — внешняя нагрузка, $p(x)$ — реакция (отпор) основания, а $R(x)$ — нормальные напряжения на границе между слоями. $R(x)$ находим, определяя σ_z в каждом слое по методу Лява-Муштары [3] и вычисляя σ_z на линии раздела слоев. Окончательно имеем $R = h_2^3 / (h_1^3 + h_2^3) q + h_1^3 / (h_1^3 + h_2^3) p$. Тогда снятие для каждого слоя вычисляется по формулам:

$$w_{\text{см}}^{(1)} = \frac{h_1 K_1 (h_1^3 + 2h_2^3)}{2(h_1^3 + h_2^3)} q + \frac{h_1^4 K_1}{2(h_1^3 + h_2^3)} p,$$

$$w_{\text{см}}^{(2)} = \frac{h_2^4 K_2}{2(h_1^3 + h_2^3)} q + \frac{h_2 K_2 (h_2^3 + 2h_1^3)}{2(h_1^3 + h_2^3)} p,$$

где $K_i = (1 + \nu_i) (1 - 2\nu_i) h_i / E_i (1 - \nu_i)$.

Разрешающая система уравнений имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_1 I_{1z_0} + E_2 I_{2z_0}}{a^4} \frac{d^4 w}{dx^4} &= q(x) - p(x); \\ w &= \frac{2(1-\nu_0^2)a}{\pi E_0} \int_{-1}^1 p(t) \ln \frac{1}{|x-t|} dt + w_{\text{см}} + C, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где моменты инерции $I_{1,2}$ вычислены относительно приведенной оси, а

$$w_{\text{см}} = \gamma (z_0/a) p(x) + \beta q(x)$$

где γ и β зависят от расположения нейтральной поверхности балки.

Если $E_1 h_1^2 > E_2 h_2^2$, то

$$\gamma = \frac{2K_2 h_2 (h_2^3 + 2h_1^3) (E_1 h_1 + E_2 h_2) + h_1^3 K_1 (E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)}{2(h_1^3 + h_2^3) (E_1 h_1^2 + 2E_1 h_1 h_2 + E_2 h_2^2)} a,$$

$$\beta = \frac{2h_2^4 K_2 (E_1 h_1 + E_2 h_2) + K_1 (h_1^3 + 2h_2^3) (E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)}{4 (h_1^3 + h_2^3) (E_1 h_1 + E_2 h_2)}.$$

Если $E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2$, то

$$\gamma = \frac{h_2 K_2 (h_2^3 + 2h_1^3) (E_1 h_1 + E_2 h_2) a}{(h_1^3 + h_2^3) (E_1 h_1^2 + 2E_1 h_1 h_2 + E_2 h_2^2)},$$

$$\beta = h_2^4 K_2 / 2 (h_1^3 + h_2^3).$$

Если $E_1 h_1^2 < E_2 h_2^2$, то

$$\gamma = K_2 (h_2^3 + 2h_1^3) a / (2 (h_1^3 + h_2^3)),$$

$$\beta = \frac{h_2^3 K_2 (E_1 h_1^2 + 2E_1 h_1 h_2 + E_2 h_2^2)}{4 (h_1^3 + h_2^3) (E_1 h_1 + E_2 h_2)}.$$

Обращая дифференциальный оператор в системе (1) с учетом граничных условий свободного опирания $w''(x)|_{x=\pm 1} = w'''(x)|_{x=\pm 1} = 0$, приходим к следующему интегральному уравнению:

$$z_0 / a p(x) + \int_{-1}^1 K(x, t) p(t) dt = f(x); \quad (2)$$

$$\text{где } K(x, t) = \frac{2(1-\nu_0^2)a}{\pi E_0 \gamma} \ln \frac{1}{|x-t|} + \frac{a^4}{12\gamma(E_1 I_{1z_0} + E_2 I_{2z_0})} |x-t|^3 \text{ и } f(x) =$$

$$= -\frac{\beta}{\gamma} q(x) + \frac{a^4}{12\gamma(E_1 I_{1z_0} + E_2 I_{2z_0})} \int_{-1}^1 |x-t|^3 q(t) dt + C_0 + C_1 x.$$

Произвольные постоянные C_0 и C_1 определяются из условий равновесия

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 q(x) dx \text{ и } \int_{-1}^1 x p(x) dx = \int_{-1}^1 x q(x) dx.$$

Решение интегрального уравнения (2) находим в виде:

$$p(x) = \sum_{k=1}^N d_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_k(x)$ — дельтаобразная функция [4], [1].

На рис.1 приведены графики распределения реактивного давления под балкой в трех случаях расположения ее нейтральной оси: в верхнем слое, на линии раздела слоев, в нижнем слое. Геометрические параметры балки и упру-

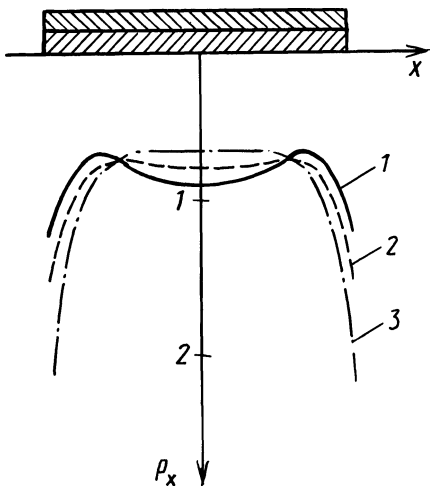


Рис. 1. Графики распределения реактивного давления под балкой при расположении ее нейтральной оси:

1 — в верхнем слое; 2 — на линии раздела слоев; 3 — в нижнем слое

гие свойства основания выбирались постоянными для всех рассматриваемых случаев. Различное положение нейтральной оси добивались соответствующим выбором упругих модулей слоев. Расчеты показывают, что распределение реактивных давлений существенно зависит от упругих характеристик слоев балки (см. рис. 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко М.Д., Свирский Е.А. Изгиб балки на нелинейной полуплоскости с учетом смятия ее по толщине. — Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982, № 4, с. 33—38.
2. Королев В.И. Упругопластические деформации оболочек. — М., 1971. — 303 с.
3. Муштарий Х.М. Теория изгиба плит средней толщины. — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1959, № 2, с. 107—113.
4. Габдуллаев Б.Г., Душков П.Н. О полигональном методе решения интегральных уравнений со слабой особенностью. — В кн.: Приложение функционального анализа к приближенным вычислениям. — Казань, 1974, с. 37—57.

УДК 539.3

Л.П.КНЯЗЕВА, канд. физ.-мат. наук,
В.С.РОМАНЧИК, канд. физ.-мат. наук (БГУ)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КУБИЧЕСКИ-АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

Для оценки достоверности результатов [1] была рассмотрена возможность решения граничных задач для кубически-анизотропной среды методом малого параметра. Задача сводится к системам интегральных уравнений, ядра которых — известные аналитические функции.

Запишем систему уравнений равновесия упругого тела в виде:

$$\Delta u_i + \frac{a}{C_{44}} \frac{\partial e}{\partial x_i} - \epsilon \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + X_i = 0, i = \overline{1,3}; \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u_i(x) |_{S_u} &= f_i(x); \\ t_i^{(n)}(x) |_{S_\sigma} &= \varphi_i(x), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$