УДК 624.044

Э.К.КОСЫХ, канд. техн. наук (ГПИ)

ПОСТРОЕНИЕ СИМПЛЕКСНЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Согласно определению, деформация однородна по отношению к отсчетной конфигурации, если тела — точки, образующие прямолинейный отрезок в конфигурации текущей. Следовательно, для симплексов рассматриваемой размерности "k" в качестве аппроксимирующих функций достаточно выбрать линейные в локальных, связанных с симплексом, координатах:

$$u(x) = a_0 + a_i x^i, \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_k — постоянные, которые необходимо определить через узловые перемещения u^N узла N.

Однако деформация, однородная относительно одной отсчетной системы, не однородна относительно другой и выбор функций (1), определенных в глобальной системе координат общего вида, трудно осуществим. Поэтому построение жесткостных соотношений симплексной модели посредством предварительного решения систем линейных уравнений, полученных из функций (1),

$$u^N = a_0 + a_i x^{N_i}, \tag{2}$$

$$i = 1, 2, \ldots, k; \quad N = 1, 2, \ldots, k+1$$

становится невозможным из-за отсутствия их в явном виде.

Естественна попытка построить необходимые соотношения, минуя процедуру решения (2) и исходя непосредственно из условия однородности деформации симплекса.

Рассмотрим в системе глобальных осей (x_i, $i = 1, 2, 3$) тетраэдр с вершинами x_i^N ($N = 1, 2, 3, 4$).

Положим деформации однородными, что обеспечивает межэлементную непрерывность. Обозначим перемещения узла N через $\Delta\bar{x}_i^N$. Тогда, используя известное положение о том, что однородную деформацию можно разложить на переносную и поворотную, переводящие одну совокупность главных осей в другую с последующим (предшествующим) чистым растяжением вдоль этих осей [1], получим в осях, совпадающих с главными осями деформаций (отмечаем чертой внизу),

$$\Delta\underline{x}_i^N = \Delta\underline{x}_{01}^{\Delta} + \Delta\underline{x}_{ai}^N + \Delta x_i^N \lambda_i ,$$

где λ_i — удлинение вдоль главной оси.

В последнем слагаемом суммирования нет. Учитывая, что удлинения λ_i связаны с главными компонентами тензора деформаций соотношением [2] $\lambda_i = \sqrt{1 + 2\gamma_{ii}} - 1$ и удерживая в разложении по $2\gamma_{ii}$ величины до первого порядка включительно, получим: $\lambda_i = \gamma_{ii}$. Обозначим через μ_{ij} матрицу преобразования от глобальных осей к главным. Тогда

$$\lambda_i x_i^N = \gamma_{ii} \ (\mu_{ij})\, x_j^N. \tag{3}$$

Вычислим перемещения точек при повороте в глобальных осях. Согласно теории конечных поворотов [3], вектор перемещения точки при

$$\vec{\rho\rho} = \frac{1}{1 + 0{,}25\theta^2}\, \vec{\theta} \times (\vec{\rho} + 0{,}5\theta \times \vec{\rho}), \tag{4}$$

где $\vec{\rho}$ — вектор, определяющий искомую точку; $\vec{\theta}$ — вектор жесткого поворота.

Если обозначить через χ угол поворота, определяемый вектором $e\,(\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma)$, то в параметрах Родрига

$$\vec{\theta} = 2\,(\lambda_0 i + \lambda_{20} j + \lambda_{30} k),$$

где $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$; $\lambda_{s0} = \lambda_s/\lambda_0$; $\lambda_1 = \sin\chi\cos\alpha$; $\lambda_2 = \sin\chi\cos\beta$; $\lambda_3 = \sin\chi\cos\gamma$; $\lambda_0 = \cos\chi$.

Тогда, используя формулы перемещения точек при повороте в глобальных координатах, получаем:

$$\Delta x_i^N = (\mu_{ij})\,\Delta x_{ai}^N = (\mu_{ij})\,\frac{2}{1+0{,}25\theta^2}\begin{pmatrix} -\lambda_{20}^2-\lambda_{30}^2 & -\lambda_{30}+\lambda_{10} & \lambda_{20}+\lambda_{10}\lambda_{30} \\ \lambda_{30}+\lambda_{20}\lambda_{10} & -\lambda_{30}^2-\lambda_{10}^2 & -\lambda_{10}+\lambda_{20}\lambda_{30} \\ -\lambda_{20}+\lambda_{30}\lambda_{10} & \lambda_{10}+\lambda_{30}\lambda_{20} & -\lambda_{10}^2+\lambda_{20}^2 \end{pmatrix} x_j^N. \tag{5}$$

Складывая соотношения (3) и (5), вычитая одноименные координаты вектора перемещений для различных вершин и умножая результат слева на обратную матрицу $(\mu_{ij})^{-1}$, получим сумму двух слагаемых, первое из которых — линейное преобразование тензора к глобальным осям. Пренебрегая величиной $0{,}25\theta^2$ в формуле (4) и во втором слагаемом (по принятой ранее точности определения коэффициентов растяжения), получим:

$$\Delta x_i^{N_i} = [\,(\epsilon_{ij}) + 2\,(\lambda_{ij})\,]\,(x_j^{N_1}), \quad i = 1, 2, 3; \quad N = 2, 3, 4. \tag{6}$$

Девять уравнений (6) позволяют определить девять неизвестных величин (шесть независимых компонентов тензора напряжений, три параметра Родрига) через перемещения узлов тетраэдра Δx_i^{Nl}.

Группируя в формуле (6) уравнения по одноименным перемещениям вершин, получим три системы по три уравнения следующего типа:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1^{21} \\ \Delta x_1^{31} \\ \Delta x_1^{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{21} & x_2^{21} & x_3^{21} \\ x_1^{31} & x_2^{31} & x_3^{31} \\ x_1^{41} & x_2^{41} & x_3^{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & -\epsilon_{13} 2\lambda_{20} \\ \epsilon_{12} & -\epsilon_{11} 2\lambda_{30} \cdot -2\lambda_{30} \\ \epsilon_{13} & -\epsilon_{12} 2\lambda_{10} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Все три системы (7) легко разрешимы относительно неизвестных.

Если обозначить миноры в разложении определителя

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 1 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & 1 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & 1 \end{vmatrix}$$

по "$\bar{k}$"-му столбцу через M_k^j, где j — номер строки, то для компонентов тензора деформаций и параметров Родрига в случае малых деформаций и поворотов получим

$$\left.\begin{aligned} &\epsilon_{ii} = \frac{1}{6v} \sum_k M_i^k \Delta x_i^k ; \\ &\epsilon_{ij} = \frac{1}{6v} \sum_k (M_i^k \Delta x_j^k + M_j \Delta x_i^k) ; \\ &2\lambda_{e0} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6v} \sum_k (M_m^k \Delta x_n^k - M_n^k \Delta x_m^k) \right], \\ &i, j, l, m, n = 1, 2, 3. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Если в соотношении (5) удержать квадраты параметров Родрига, то аналогично выражениям (8) можно получить компоненты тензора конечных деформаций. Преобразуя все векторы (Δx_i^{N1}) и (x_j^{N1}) к произвольным осям, получим соотношение типа (8) для общего случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. — М., 1961. — 824 с. 2. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М., 1976. — 464 с. 3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М., 1975. — 520 с.

УДК 539.3

М.Д.МАРТЫНЕНКО, д-р физ.-мат.наук,
А.И.ПРУСОВ, Е.А.СВИРСКИЙ, канд. физ.-мат.наук (БГУ)

ИЗГИБ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ БАЛКИ НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача об изгибе свободно опертой биметаллической балки на упругой полуплоскости с учетом ее сжатия (смятия) по высоте. Балка толщиной $2h$ находится в равновесии под действием нормальной нагрузки $q(x)$ и реакции (отпора) основания $p(x)$, приложенных к плоскостям $z = \pm h$. Толщина первого слоя h_1, а его упругие постоянные E_1 и ν_1. Соответственно для второго слоя толщина h_2 и упругие постоянные E_2 и ν_2. Трением между балкой и полуплоскостью будем пренебрегать.