

В качестве числового примера приведем результат вычисления напряжения  $\sigma_y$  при  $x = 0$  и  $y = 0$  для упругого квадрата, растягиваемого двумя сосредоточенными силами, и сравним с результатами, полученными другими методами. Так, в результате вычисления сумм при " $j$ " = 1, 2, ..., 10 и " $k$ " = 1, 2, ..., 10 дают  $\sigma_y = 1,18P/a$ . Метод конечных элементов [5] при решении 1680-ти алгебраических уравнений дает  $\sigma_y = 0,959 P/a$ , модифицированный вариационный метод Треффца в результате решения 50-ти алгебраических уравнений —  $\sigma_y = 0,940P/a$  [6].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М., 1954. — 647 с. 2. Прокопов В.К. Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области. — Прикладная математика и механика, 1952, вып. 1, с. 45–56. 3. Крушевский А.Е., Чурakov В.М. Примеры решения некоторых задач математической теории упругости в неортогональных рядах. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1975, вып. 2, с. 91–102. 4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. — М., 1953, с. 804. 5. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ (метод конечных элементов). — Л., 1971, с. 208. 6. Крушевский А.Е., Кондратюк В.Ф. Об одном способе построения уравнения Лагранжа первого рода в теории упругости. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1975, вып. 1, с. 34–38.

УДК 539.3

В.Н.АПАНОВИЧ, канд. техн. наук (БПИ)

### НЕКОНФОРМНАЯ СХЕМА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

В настоящее время известно несколько неконформных схем метода конечных элементов (МКЭ), основанных на конечных элементах (КЭ) Вильсона, Крузея—Равьяра, Адина и др. [1]. В данной работе предлагается неконформный КЭ и на примере задачи о кручении исследуется сходимость соответствующей схемы МКЭ.

Определим КЭ как тройку  $(K, P, \Sigma)$ , где  $K$  — невырожденный  $n$ -симплекс в пространстве  $R^n$  ( $n = 2, 3$ );  $P = P_1$  — пространство полиномов первой степени, определенных на области  $K$ ;  $\Sigma$  — конечное множество линейных форм (степеней свободы КЭ) вида

$$\forall p \in P \quad \varphi_i(p) = \int_{K'_i} p d\gamma, \quad 1 \leq i \leq n+1. \quad (1)$$

Здесь  $K'_i$ ,  $1 \leq i \leq n+1$  — грани симплекса  $K$ .

**Т е о р е м а 1.** Множество  $\Sigma$  степеней свободы КЭ (1) является  $P$ -унисольвентным на пространстве  $P_1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно теореме о среднем, имеем:

$$\int_{K'_i} p(x) d\gamma = p(a_i) \int_{K'_i} d\gamma, \quad 1 \leq i \leq n+1,$$

где  $a_i = (a_{ij})_{j=1}^{n+1} \in R^n$  – некоторая точка на  $i$ -й грани КЭ, в которой полином  $p(x)$  принимает среднее значение.

Точки  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n+1$ ) являются вершинами некоторого невырожденно-го  $n$ -симплекса в  $R^n$ . Полином первой степени однозначно определяется своими значениями в этих точках [1].

Задав  $(K, P, \Sigma)$  и достаточно гладкую функцию  $v : K \rightarrow R$ , определим  $P$ -аппроксимант функции  $v$  :

$$Pv = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i(v) p_i, \text{ который однозначно определен в}$$

силу  $P$ -унисольвентности множества  $\Sigma$ .

На пространстве  $P_1$  оператор  $P$ -аппроксимации совпадает с тождественным оператором, т.е.

$$\forall p \in P_1 \quad Pp = p. \tag{2}$$

Пусть в пространстве  $R^n$  задана многоугольная область  $\bar{\Omega}$  с непрерывной по Липшицу границей  $\Gamma$ . Ассоциируем с разбиением  $\bar{T}_h$  области  $\bar{\Omega}$  пространство  $X_h$  конечных элементов, определяемое характеристикой

$$X_h = \{v = (p_k)_k \in T_h \in \Pi \quad p_k; \forall K \in T_h \int_{K'} p_{K1} d\gamma = \int_{K'} p_{K2} d\gamma\}, \tag{3}$$

где  $P_k = P_1$  – пространства функций, определенных на КЭ;  $K_1$  и  $K_2$  – соседние КЭ, имеющие общую грань  $K'$ ;  $L_h$  – множество общих граней КЭ.

Сходимость предложенной схемы МКЭ продемонстрируем на модельной задаче о кручении односвязного профиля, которая может быть сформулирована как задача Дирихле:

$$-\Delta u = 1; \tag{4}$$

$$u_\Gamma = 0. \tag{5}$$

Вариационная формулировка задачи (4), (5); найти  $u \in H_0^1(\Omega)$  такое, что  $\forall v \in H_0^1(\Omega), a(u, v) = f(v),$

где  $H_0^1(\Omega)$  – пространство Соболева,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n D_i u D_i v dx - \tag{7}$$

билинейная форма, определенная на  $H^1(\Omega) \cdot H^1(\Omega)$ ;  $f(v) = \int_{\Omega} v dx$  – линейная форма.

Определим подпространство  $X_{0h} \in X_h$  :

$$X_{0h} = \{v_h \in X_h, K' \cap \Gamma \neq \emptyset \int_{K'} v_h d\gamma = 0\}.$$

Так как функции  $V_h \in X_{0h}$  не являются непрерывными, то  $X_{0h} \not\subset H_0^1(\Omega)$  и билинейная форма (7) не определена на пространстве  $X_{0h}$ . Для преодоления этой трудности определим аппроксимирующую билинейную форму:

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{k \in \tau_h} \int \sum_{i=1}^n D_i u_h D_i v_h dx. \quad (8)$$

Тогда дискретная задача состоит в нахождении такого  $u_h \in X_{0h}$ , что  $\forall v_h \in X_{0h} \quad a_h(u_h, v_h) = f(v_h)$ .

Введем в пространстве  $X_{0h}$  норму.

**Т е о р е м а 2.** Отображение

$$v_h \rightarrow \|v_h\|_h = \left( \sum_{k \in \tau_h} |v_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2}, \quad (9)$$

где  $|\cdot|_{1,K}$  — полунорма в пространстве  $H^1(K)$ , является нормой на пространстве  $X_{0h}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $v_h \in X_{0h}$  удовлетворяет условию  $\|v_h\|_h = 0$ . Тогда всякий полином  $v_h|_K$  равен постоянной и, следовательно,  $D_i(v_h|_K) = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $K \in \tau_h$ . При этом функция  $v_h$  — единственная постоянная, так как она непрерывна в серединах сторон КЭ и, следовательно, тождественна нулю, поскольку обращается в нуль в серединах сторон КЭ, совпадающих с границей  $\Gamma$  области  $\Omega$ .

Билинейные формы (8) равномерно  $X_{0h}$ -эллиптически, так как из соотношений (8) и (9) следует, что

$$\forall v_h \in X_{0h} \quad \|v_h\|_h = a_h(u_h, v_h).$$

В этом случае оценку ошибки можно произвести на основе второй леммы Стрэнга [1], согласно которой

$$\|u - u_h\|_h \leq C \left( \inf_{v_h \in X_{0h}} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in X_{0h}} \frac{|a_h(u, w_h) - f(w_h)|}{\|w_h\|_h} \right). \quad (10)$$

Предположим, что  $u \in H^2(\Omega)$ , тогда с учетом свойства (2) из теоремы 3.1.4 [1] получаем:

$$\inf_{v_h \in X_{0h}} \|u - v_h\|_h \leq \sum_{K \in \tau_h} (|u - \Pi u|_{1,K}^2)^{1/2} \leq Ch |u|_{2,\Omega}. \quad (11)$$

**Т е о р е м а 3.** Пусть решение вариационной задачи  $u \in H^2(\Omega)$ . Тогда существует такая не зависящая от  $h$  постоянная  $C$ , что для всякого регулярного семейства  $\tau_h$  разбиений области  $\bar{\Omega}$

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch |u|_{2,\Omega} \quad (12)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** После оценки первого члена неравенства (10) оценим его второй член.

Учитывая уравнение (4), можно записать:  $\forall w_h \in X_{0h}$

$$R_h(u, w_h) = a_h(u, w_h) - f(w_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \left( \sum_{l=1}^n D_l u D_l w_h + \Delta u w_h \right) dx =$$

$$= \sum_{K' \in L_h} \int_{K'} D_\nu u (p_{K_1} - p_{K_2}) d\gamma = \sum_{K' \in L_h} \int_{K'} D_\nu u p d\gamma,$$

где  $D_\nu$  — производная по нормали к границе КЭ;  $p_{K_1} \in P_{K_1}$ ,  $p_{K_2} \in P_{K_2}$ ,  $K_1$  и  $K_2$  — соседние КЭ, имеющие общую грань  $K'$ ,  $p = p_{K_1}|_{K'} - p_{K_2}|_{K'}$ .

Для получения оценки (12) воспользуемся техникой доказательства Сьярле [1], для чего установим два свойства инвариантности выражения  $R_{K'}(u, p) = \int_{K'} D_\nu u p d\gamma$  относительно многочленов.

Функция  $p = p_{K_1}|_{K'} - p_{K_2}|_{K'}$  является линейной, обращающейся в нуль в середине грани  $K'$ . Отсюда следует первое свойство инвариантности

$$\forall u \in H^2(\Omega) \quad \forall p \in P_0 \quad R_{K'}(u, p) = 0.$$

Второе свойство инвариантности

$$\forall u \in P_1 \quad \forall p \in P_1 \quad R_{K'}(u, p) = 0$$

является следствием того факта, что производная  $D_\nu u$  в этом случае является константой, а интеграл  $\int_{K'} p d\gamma = 0 \quad \forall K' \in L_h, \forall p \in P_1(K')$  обращается в нуль

в силу характеристики (3).

Следовательно, на основании билинейной леммы Сьярле [1] и леммы 1.32 [2] для некоторого исходного КЭ  $\hat{K}$ , из которого аффинным отображением может быть получен любой КЭ из семейства  $\tau_h$ , имеем:

$$\forall \hat{u} \in H^2(\hat{K}) \quad \forall \hat{p} \in P_{\hat{K}} \quad |R_{K'}(\hat{u}, \hat{p})| \leq \hat{C}_1 |\hat{u}|_{2, \hat{K}} |\hat{p}|_{1, \hat{K}} \leq \hat{C}_1 |\hat{u}|_{2, \hat{K}} |\hat{p}|_{1, \hat{K}}$$

Тогда, используя теорему 3.1.2 [1] и предположение о регулярности разбиения  $\tau_h$ , получим

$$\forall K \in \tau_h, \forall u \in H^2(K), \forall p \in P_K = P_1, |R_{K'}(u, p)| \leq Ch |u|_{2, K} |p|_{1, K}$$

Отсюда  $|R_h(u, w_h)| \leq Ch |u|_{2, \Omega} \|w_h\|_h$  и, следовательно,

$$\sup_{w_h \in X_{0h}} \frac{|a_h(u, w_h) - f(w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq Ch |u|_{2, \Omega}$$

Получили оценку, аналогичную оценке (11), что и требовалось доказать. В качестве численного примера рассмотрим задачу (4), (5) о кручении вала квадратного сечения, точное решение которой известно [3].

На рис. 1 а-г показаны четыре варианта разбиения сечения вала на конечные элементы. В табл. 1 представлены вычисленные степени свободы (1),

## Степени свободы (1)

Вариант	Номер грани			
	1	2	3	4
а	$\sqrt{2}/3$	—	—	—
б	$\sqrt{2}/6$	—	—	—
в	$\sqrt{2}/6$	0,25	—	—
г	$7\sqrt{2}/48$	$\sqrt{2}/48$	$\sqrt{2}/12$	0,25

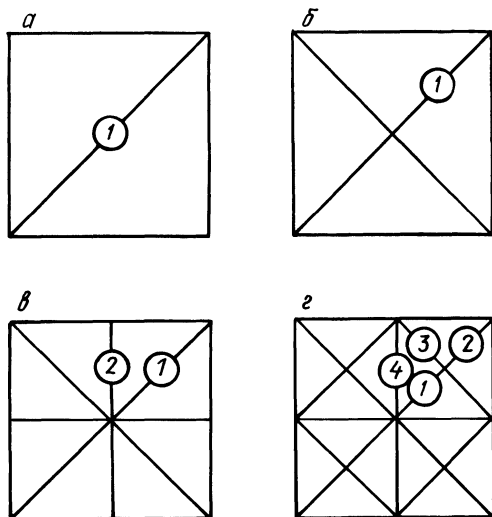


Рис. 1. Варианты разбиения сечения вала на конечные элементы

соответствующие граням, пронумерованным на рис. 1. Вследствие симметрии задачи значения приведены не для всех граней разбиения  $\tau_h$ .

Сравнение полученного решения с точным [3] показывает, что для всех представленных вариантов разбиения области  $\Omega$  имеет место равенство:

$$\forall K' \in L_h \quad \varphi(u_h) = \int_{K'} u_h d\varphi = \int_{K'} u d\varphi = \varphi(u),$$

где  $u$  — точное решение задачи.

Таким образом, для всех вариантов разбиения получены точные дискретные решения задачи, что свидетельствует об эффективности предложенной схемы МКЭ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М., 1980. — 512 с.
2. Гаевский Х., Грёгер К., Захаряс К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М., 1978. — 336 с.
3. Михлин С.Г., СМОЛЦКИЙ Х.Г. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — М., 1965. — 383 с.