$$\Delta^{(a)}(q_a,\omega) = q_a^2 - \rho\omega^2\Lambda_a^{-1}(q_a,\omega) = 0. \qquad (7)$$

Здесь $\Lambda_a(q_a,\omega)$ — спектр упругого оператора. Функции $\Lambda_a(q_a,\omega)$ выражаются через функцию $m^*(q,\omega)$ эталонной задачи. В силу этого корни дисперсионного уравнения (7) упругой задачи выражаются через корни дисперсионного уравнения (2) эталонной задачи. Таким образом, характер поведения среднего поля $<\varphi>$ в среде качественно аналогичен характеру поведения среднего поля $<u_i>$, различия связаны с поляризацией упругих волн. В среде, характеризуемой корреляционной функцией (6), существует диапазон частот, в котором отсутствует затухание среднего поля. При $2\xi_t < 1$ продольная и поперечная волны распространяются без затухания. В диапазоне $\xi_l + \xi_t < 1 < 2\xi_t$ продольная волна не затухает, а поперечная затухает. При $1 < 2\xi_l$ затухают продольная и поперечная волны ($\xi_a = a\omega c_a^{-1}$).

Корреляционная функция вида (6) описывает марковское случайное поле коэффициентов среды. Подобного вида корреляционная зависимость отмечена, например, в экспериментах для хаотически армированных стеклопластиков. При проектировании конструкций из композитных материалов необходимо учитывать влияние не только конструкционных параметров, но и случайный разброс коэффициентов, характеризующих упругие свойства материалов. Так, если при синтезе слоистого покрытия, свойства которого заданы в зависимости от колебаний, материал каждого слоя не должен в среднем влиять на затухание колебаний в низкочастотном диапазоне, то нужно брать материал слоев таким, чтобы структура описывалась корреляционной функцией (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. — М., 1976. — 367 с. 2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М., 1974. — 223 с. 3. Болотин В.В. О плотности параметрических резонансов. — Прикладная математика и механика, 1980, т, 44, вып. 6, с. 1087—1094. 4. Чигарев А.В. Распространение волн в упругой микронеоднородной среде. — Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 4, с. 128—135.

УДК 539.3

А.Е.КРУШЕВСКИЙ, канд. техн. наук (БПИ)

СЖАТИЕ (РАСТЯЖЕНИЕ) УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПРИ ЗАДАННЫХ НА КОНТУРЕ НАПРЯЖЕНИЯХ

Как известно, задача о равновесии упругого прямоугольника в замкнутом виде пока не решена. Метод Мусхелишвили требует разложения в степенной ряд интеграла Кристофеля-Шварца, осуществляющего конформное отображение прямоугольника на полуплоскость [1], и задача приводится к бесконечной системе алгебраических уравнений. При этом обнаруживается медленная сходимость результатов, особенно в угловых точках. Метод однородных решений [2] позволяет точно выполнить краевые условия на двух противоположных сторонах прямоугольника, а на двух других лишь приближенно.

Использование метода бесконечного дифференцирования [3] дает возможность получить решение в замкнутом виде, однако характер сходимости полученных при этом неортогональных рядов (особенно на контуре) пока не выяснен.

В настоящей статье дается замкнутое решение поставленной задачи на основе вариационного принципа Лагранжа с применением рядов Фурье с дополнительными членами в виде полиномов Лежандра, устраняющих неполноту ряда Фурье на контуре прямоугольника. Полученные при таком методе бесконечные системы алгебраических уравнений удалось решить в замкнутом виде.

Итак, решение задачи строим в виде следующих рядов [4]:

$$u(x,y) = U_0(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{12y^2}{b^2} - 1\right)U_2(x) + \sum_{k=1}^{\infty} U_c(x)\cos\frac{2\pi ky}{b};$$

$$v(x,y) = \frac{2y}{b} V_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} V_s(x)\sin\frac{2\pi ky}{b}.$$

Применяя данные разложения к функциям U_0, U_c и V_s, зависящим от аргумента "x", запишем следующие ряды с неизвестными постоянными коэффициентами:

$$u(x,y) = \frac{2x}{a}\left(U_{10} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{1c}\cos\frac{2\pi ky}{b}\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\left(U_{s0} + \frac{1}{2}\left(\frac{12y^2}{b^2}-1\right)U_{s2} +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} U_{sc}\cos\frac{2\pi ky}{b}\right)\sin\frac{2\pi ix}{a};$$

$$v(x,y) = \frac{2y}{b}\left(V_{01} + \sum_{i=1}^{\infty} V_{c1}\cos\frac{2\pi ix}{a}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(V_{0s} + \frac{1}{2}\left(\frac{12x^2}{a^2}-1\right)V_{2s} +\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty} V_{cs}\cos\frac{2\pi ix}{a}\right)\sin\frac{2\pi ky}{b}.$$

Для определения неизвестных постоянных коэффициентов U_{10}, U_{1c}, U_{s0}, U_{s2}, U_{sc}, V_{01}, V_{c1}, V_{0s}, V_{2s}, V_{cs} составляем четыре вариационных уравнения равновесия внутри тела на возможных перемещениях:

$$\delta u_1 = \sin(2\pi ix/a);\ \delta u_2 = \sin(2\pi ix/a)\cos(2\pi ky/b);\ \delta v_1 = \sin(2\pi ky/b);$$

$$\delta v_2 = \cos(2\pi ix/a)\sin(2\pi ky/b)$$

и шесть уравнений равновесия на контуре прямоугольника:

при $x = \pm\frac{a}{2}$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy = 0;\ \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x \cos\frac{2\pi ky}{b} dy = 0;\ \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{xy}\sin\frac{2\pi ky}{b} dy = 0;$$

при $y = \pm\frac{b}{2}$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \tau_{xy}\sin\frac{2\pi ix}{a} dx = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{(Y_x^+ + Y_x^-)}{2}\sin\frac{2\pi ix}{a} dx;$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \sigma_y dx = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{(y^+ - y^-)}{2} dx, \int_{-a/2}^{a/2} \sigma_y \cos\frac{2\pi i x}{a} dx =$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{(y^+ - y^-)}{2} \cos\frac{2\pi i x}{a} dx.$$

В результате совместного решения этих уравнений получаем следующие формулы для упругих перемещений и напряжений:

$$u = -\frac{x}{8(\gamma-1)G}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{\gamma_2}{a}(y^+ - y^-) + \frac{\gamma}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\cos\pi i}{\pi i}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi i x}{a}\right)\times$$

$$\times dx + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(2\pi i x/a)\,\mathrm{ch}(2\pi i y/a)}{4\pi i G\,\mathrm{sh}(\pi b i/a)}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi i x}{a}dx\right. +$$

$$+\frac{\sin(2\pi i x/a)}{\gamma\,\mathrm{sh}(\pi b i/a)}\left(\mathrm{ch}\frac{2\pi i y}{a} + \frac{(\gamma-1)\pi i}{a}\left(2y\,\mathrm{sh}\frac{2\pi i y}{a} - b\,\mathrm{ch}\frac{2\pi i y}{a}\,\mathrm{cth}\frac{\pi b i}{a}\right)\right)\times$$

$$\times\left(V_{c1} + \frac{1}{4\pi i G}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi i x}{a}dx\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\cos\pi i\cos\pi k\,\mathrm{sh}(\pi a k/b)\cos(2\pi k y/b)}{\pi\gamma(\mathrm{sh}(2\pi a k/b) + 2\pi a k/b))\,(b i^2/a + (a k^2/b))^2}\left(\gamma\,\mathrm{sh}\frac{2\pi k x}{b}\right. -$$

$$-\frac{(\gamma-1)\pi k}{b}\left(2x\,\mathrm{ch}\frac{2\pi k x}{b} - a\,\mathrm{sh}\frac{2\pi k x}{b}\,\mathrm{cth}\frac{\pi a k}{b}\right)\Big)\Big(8ikV_{C1} +$$

$$+\frac{\gamma b^2 i^2 + (3\gamma-2)a^2k^2}{(\gamma-1)G\pi a^2 k}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi i x}{a}dx)\Big);$$

$$v = \frac{y}{8(\gamma-1)G}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{\gamma}{a}(y^+ - y^-) + \frac{\gamma_2}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\cos\pi i}{\pi i}(y_x^+ +\right.$$

$$\left.+ y_x^-)\sin\frac{2\pi i x}{a}\right)dx + \sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{\cos(2\pi i x/a\,\mathrm{sh}(2\pi i y/a)}{4\pi i G\,\mathrm{sh}(\pi b i/a)}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ +\right.$$

$$+ y_x^-)\sin\frac{2\pi i x}{a}dx + \frac{\cos(2\pi i x/a)}{\gamma\mathrm{sh}(\pi b i/a)}\left(\gamma\mathrm{sh}\frac{2\pi i y}{a} - \frac{(\gamma-1)\pi i}{a}\left(2y\,\mathrm{ch}\frac{2\pi i y}{a}\right.\right. -$$

$$\left.\left.- b\,\mathrm{sh}\frac{2\pi i y}{a}\,\mathrm{cth}\frac{\pi b i}{a}\right)\right)\left(V_{c1} + \frac{1}{4\pi i G}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi i x}{a}dx\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\cos\pi i\cos\pi k\,\mathrm{sh}(\pi a k/b\,\sin(2\pi k y/b)}{\pi\gamma(b i^2/a + a k^2/b)^2(\mathrm{sh}(2\pi a k/b) + 2\pi a k/b)}\left(\mathrm{ch}\frac{2\pi k x}{b}\right. +$$

$$+\frac{(\gamma-1)\pi k}{b}\left(2x\,\mathrm{sh}\frac{2\pi k x}{b} - a\,\mathrm{ch}\frac{2\pi k x}{b}\,\mathrm{cth}\frac{\pi a k}{b}\right)\Big)\Big(8ikV_{c1} +$$

$$+\frac{\gamma b^2 i^2+(3\gamma-2)a^2k^2}{(\gamma-1)G\pi a^2 k}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi ix}{a}\,dx));$$

$$\tau_{xy}=\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{\sin(2\pi ix/a)\mathrm{sh}(2\pi iy/a)}{a\,\mathrm{sh}(\pi bi/a)}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi ix}{a}\,dx+$$

$$+\frac{4(\gamma-1)G\pi^2 i^2\sin(2\pi ix/a)}{\gamma a^2\,\mathrm{sh}(\pi bi/a)}(2y\,\mathrm{ch}\frac{2\pi iy}{a}-b\,\mathrm{sh}\frac{2\pi iy}{a}\mathrm{cth}\frac{\pi bi}{a})(V_{c1}+$$

$$+\frac{1}{4\pi iG}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi ix}{a}\,dx)-\sum_{k=1}^{\infty}(2x\,\mathrm{ch}\frac{2\pi kx}{b}-$$

$$-a\,\mathrm{sh}\frac{2\pi kx}{b}\mathrm{cth}\frac{\pi ak}{b})\frac{4(\gamma-1)G\pi ik^2\cos\pi i\cos\pi k\,\mathrm{sh}(\pi ak/b)\sin(2\pi ky/b)}{\gamma b^2(\mathrm{sh}(2\pi ak/b)+2\pi ak/b)(bi^2/a+ak^2/b)^2}\times$$

$$\times(8ikV_{c1}+\frac{\gamma b^2 i^2+(3\gamma-2)a^2k^2}{(\gamma-1)G\pi a^2 k}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi ix}{a}\,dx));$$

$$\sigma_x=\sum_{i=1}^{\infty}((-\frac{\cos\pi i}{b\pi i}+\frac{\cos(2\pi ix/a)\mathrm{ch}(2\pi iy/a)}{a\,\mathrm{sh}(\pi bi/a)})\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi x}{a}\,dx+$$

$$+\frac{4(\gamma-1)G\pi i\cos(2\pi ix/a)}{\gamma a\,\mathrm{sh}(\pi bi/a)}(\mathrm{ch}\frac{2\pi iy}{a}+\frac{\pi i}{a}(2y\,\mathrm{sh}\frac{2\pi iy}{a}-b\,\mathrm{ch}\frac{2\pi iy}{a}\mathrm{cth}\frac{\pi bi}{a}))\times$$

$$\times(V_{C1}+\frac{1}{4\pi iG}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi ix}{a}\,dx)-\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{ch}\frac{2\pi kx}{b}-$$

$$-\frac{\pi k}{b}(2x\,\mathrm{sh}\frac{2\pi kx}{b}-a\,\mathrm{ch}\frac{2\pi kx}{b}\mathrm{cth}\frac{\pi ak}{b}))\times$$

$$\times\frac{4(\gamma-1)Gik\cos\pi i\cos\pi k\,\mathrm{sh}(\pi ak/b)\cos(2\pi ky/b)}{\gamma b(\mathrm{sh}(2\pi ak/b)+2\pi ak/b)(bi^2/a+ak^2/b)^2}(8ikV_{C1}+$$

$$+\frac{\gamma b^2 i^2+(3\gamma-2)a^2k^2}{(\gamma-1)G\pi a^2 k}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi ix}{a}\,dx));$$

$$\sigma_y=\int_{-a/2}^{a/2}\frac{(y^+ - y^-)\,dx}{2a}+\sum_{i=1}^{\infty}(-\frac{\cos(2\pi ix/a)\,\mathrm{ch}(2\pi iy/a)}{a\,\mathrm{sh}(\pi bi/a)}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ +$$

$$+y_x^-)\sin\frac{2\pi ix}{a}dx+\frac{4(\gamma-1)G\pi i\cos(2\pi ix/a)}{\gamma a\,\mathrm{sh}(\pi bi/a)}(\mathrm{ch}\frac{2\pi iy}{a}-$$

$$-\frac{\pi i}{a}(2y\,\mathrm{sh}\frac{2\pi iy}{a}-b\,\mathrm{ch}\frac{2\pi iy}{a}\mathrm{cth}\frac{\pi bi}{a}))(V_{c1}+$$

$$+\frac{1}{4\pi iG}\int_{-a/2}^{a/2}(y_x^+ + y_x^-)\sin\frac{2\pi ix}{a}\,dx)-\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{ch}\frac{2\pi kx}{b}+$$

$$+\frac{\pi k}{b}\left(2x\,\mathrm{sh}\,\frac{2\pi kx}{b}-a\,\mathrm{ch}\,\frac{2\pi kx}{b}\,\mathrm{cth}\,\frac{\pi ak}{b}\right)\Big)\times$$

$$\times\frac{4(\gamma-1)Gik\cos\pi i\cos\pi k\,\mathrm{sh}(\pi ak/b)\cos(2\pi ky/b)}{\gamma b(\mathrm{sh}(2\pi ak/b)+2\pi ak/b)(bi^2/a+ak^2/b)^2}\Big(8ikV_{c1}+$$

$$+\frac{(3\gamma-2)a^2k^2+\gamma b^2i^2}{(\gamma-1)G\pi a^2k}\int\limits_{-a/2}^{a/2}(y_x^++y_x^-)\sin\frac{2\pi ix}{a}\,dx\Big)\Big);$$

$$V_{c1}=\frac{\gamma(\mathrm{ch}(2\pi bi/a)-1)}{2(\gamma-1)G\pi i(\mathrm{sh}(2\pi bi/a)+2\pi bi/a)}\Big(P(i)+$$

$$+\frac{16}{\pi^2\Delta}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P(i)i^3k^3(\mathrm{ch}(2\pi bi/a)-1)(\mathrm{ch}(2\pi ak/b)-1)}{(bi^2/a+ak^2/b)^4(\mathrm{sh}(2\pi bi/a)+2\pi bi/a)(\mathrm{sh}(2\pi ak/b)+2\pi ak/b)}\Big);$$

$$\Delta=1-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16i^3k^3(\mathrm{ch}(2\pi bi/a)-1)(\mathrm{ch}(2\pi ak/b)-1)}{\pi^2(bi^2/a+ak^2/b)^4(\mathrm{sh}(2\pi bi/a)+2\pi bi/a)(\mathrm{sh}(2\pi ak/b)+2\pi ak/b)};$$

$$P(i)=\int\limits_{-a/2}^{a/2}\frac{(y^+-y^-)}{2}\cos\frac{2\pi ix}{a}\,dx-\Big(\frac{\mathrm{sh}(2\pi bi/a)-(2(\gamma-1)\pi bi/a)}{2\gamma(\mathrm{ch}(2\pi bi/a)-1)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4i^3k(\mathrm{ch}(2\pi bi/a)-1)(\gamma b^2i^2+(3\gamma-2)a^2k^2)}{\gamma\pi a^2(\mathrm{sh}(2\pi ak/b)+2\pi ak/b)(bi^2/a+ak^2/b)}\Big)\times$$

$$\times\int\limits_{-a/2}^{a/2}(y_x^++y_x^-)\sin\frac{2\pi ix}{a}\,dx;$$

$$\gamma=2(1-\nu)/(1-2\nu);\quad \gamma_2=\gamma-2.$$

Полученное решение точно удовлетворяет уравнениям Ляме при отсутствии объемной нагрузки ($\mathrm{div}T=0$), а также для каждого индекса "i" и "k" точно выполняет условие отсутствия касательных напряжений ($\tau_{xy}=0$) при $x=\pm a/2$. Условие отсутствия нормальных напряжений при $x=\pm a/2$ выполняется точно для каждого "i" при "k" $\to\infty$, т.е. за счет сходимости рядов по "k". Условия нагружения нормальной и касательной нагрузками при $y=\pm b/2$ выполняются в интегральной форме:

$$\int\limits_{-a/2}^{a/2}\tau_{xy}\sin\frac{2\pi ix}{a}\,dx=\int\limits_{-a/2}^{a/2}\frac{y_x^++y_x^-}{2}\sin\frac{2\pi ix}{a}\,dx;$$

$$\int\limits_{-a/2}^{a/2}\sigma_y\cos\frac{2\pi ix}{a}\,dx=\int\limits_{-a/2}^{a/2}\frac{y^+-y^-}{2}\cos\frac{2\pi ix}{a}\,dx.$$

Это означает, что невязка выполнения условий при $y=\pm b/2$ в соответствии с основной леммой вариационного исчисления [4] при "i"$\to\infty$ стремится к нулю.

В качестве числового примера приведем результат вычисления напряжения σ_y при $x = 0$ и $y = 0$ для упругого квадрата, растягиваемого двумя сосредоточенными силами, и сравним с результатами, полученными другими методами. Так, в результате вычисления сумм при "i" = 1, 2, ..., 10 и "k" = 1, 2, ... , 10 дают $\sigma_y = 1{,}18P/a$. Метод конечных элементов [5] при решении 1680-ти алгебраических уравнений дает $\sigma_y = 0{,}959\, P/a$, модифицированный вариационный метод Треффца в результате решения 50-ти алгебраических уравнений — $\sigma_y = 0{,}940P/a$ [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М., 1954. — 647 с. 2. Прокопов В.К. Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области. — Прикладная математика и механика, 1952, вып. 1, с. 45—56. 3. Крушевский А.Е., Чураков В.М. Примеры решения некоторых задач математической теории упругости в неортогональных рядах. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1975, вып. 2, с. 91—102. 4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. — М., 1953, с. 804. 5. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ (метод конечных элементов). — Л., 1971, с. 208. 6. Крушевский А.Е., Кондратюк В.Ф. Об одном способе построения уравнения Лагранжа первого рода в теории упругости. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1975, вып. 1, с. 34—38.

УДК 539.3

В.Н.АПАНОВИЧ, канд. техн. наук (БПИ)

НЕКОНФОРМНАЯ СХЕМА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

В настоящее время известно несколько неконформных схем метода конечных элементов (МКЭ), основанных на конечных элементах (КЭ) Вильсона, Крузея—Равьяра, Адини и др. [1]. В данной работе предлагается неконформный КЭ и на примере задачи о кручении исследуется сходимость соответствующей схемы МКЭ.

Определим КЭ как тройку (K, P, Σ), где K — невырожденный n-симплекс в пространстве R^n $(n = 2, 3)$; $P = P_1$ — пространство полиномов первой степени, определенных на области K; Σ — конечное множество линейных форм (степеней свободы КЭ) вида

$$\forall p \in P \quad \varphi_i(p) = \int_{K_i'} p\,d\gamma, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1. \tag{1}$$

Здесь K_i', $1 \leqslant i \leqslant n+1$ — грани симплекса K.

Т е о р е м а 1. Множество Σ степеней свободы КЭ (1) является P-унисольвентным на пространстве P_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме о среднем, имеем:

$$\int_{K_i'} p(x)\,d\gamma = p(a_i) \int_{K_i'} d\gamma, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1,$$