ми экспериментального исследования прочности изделий из стекловолокнитов, изложенными в книге [1].

Таким образом, предложенный здесь метод прогнозирования прочности позволяет установить закономерности влияния макронеоднородности на прочность стекловолокнитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д е д ю х и н В.Г., С т а в р о в В.П. Прессованные стеклопластики. — М., 1976. — 272 с. 2. С т а в р о в В.П. Управление качеством машиностроительных изделий из стекловолокнитов. —Весцi АН БССР. Сер. фiз.-тэхн. навук. 1981, № 4, с. 56—61. 3. Б о л о т и н В.В. Статистические методы в строительной механике. 2-е изд. — М., 1965. — 279 с. 4. Р а б и н о в и ч А.Л. Об упругих постоянных и прочности анизотропных материалов. — Тр. ЦАГИ, 1946, № 582, с. 1—56. 5. Х и л л Р. Упругие свойства составных сред. Некоторые теоретические принципы: Пер. с англ. — Механика, 1964, № 5, с. 127—143. 6. Н е м е ц Я., С е р е н с е н С.В. Прочность пластмасс. — М., 1970. — 335 с. 7. С т е п а н ы ч е в Е.И. Прочность стеклопластмасс в связи с влиянием эксплуатационных и конструкционных факторов: Дис. ...канд. техн. наук. — М., 1965. — 122 с.

УДК 539.4

А.В.ЧИГАРЕВ, канд. физ-мат. наук (БПИ)

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ЗАДАННЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Проектирование материалов с заданными свойствами может быть осуществлено за счет синтеза соответствующей структуры. Учет структуры среды в рамках модели неоднородного тела проводится с помощью подходящего выбора коэффициентов [1], а для композитов со случайным разбросом свойств за счет , например, корреляционных функций параметров среды. Задача нахождения корреляционной (структурной) функции среды по заданному среднему характеру колебаний является обратной и приводит к интегральному уравнению первого рода [2]. Задание корней дисперсионного уравнения эквивалентно заданию средней реакции композитной среды на колебательные воздействия [3].

Рассмотрим сначала задачу нахождения корреляционной функции среды, обладающей заданными динамическими свойствами в акустическом приближении. В этом случае распространение колебаний в среде описывается уравнением Гельмгольца. Эта задача является эталонной для упругой среды [4], и дальше будет показана ее связь с упругой задачей.

1. Среднее поле $<\varphi>$ в случайно неоднородной среде удовлетворяет эталонному операторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta<\varphi>+k^2 m_0 M^*<\varphi> = 0.$$

Здесь $M^* = \int m^*(\vec{x}-\vec{x}_1)\,d\vec{x}_1$ —интегральный оператор, ядро которого $m^*(\vec{x}-\vec{x}_1)$ для статистически изотропной однородной среды является разностным.Спектр оператора $m^*(\vec{q},\omega) = \int m^*(\vec{r}) \exp(-i\vec{q}\vec{r})\, d\vec{r}$ при учете многократного рассеяния выражается через спектр $\gamma^*(\vec{q},\omega)$ оператора поляризуемости среды $\Gamma^* = \int \gamma^*(\vec{x}-\vec{x}_1)\, d\vec{x}_1$:

$$\left.\begin{aligned} m^*(\vec{q},\omega) &= m_0\,(1-\gamma^*(\vec{q},\omega))^{-1};\\ \gamma^*(\vec{q},\omega) &= \int \gamma^*(\vec{r}) \exp(-i\vec{q}\vec{r})\, d\vec{r};\\ \gamma^*(\vec{r}) &= -R(\vec{r}) \exp(ikm_0^{1/2} r)\, r^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Собственными функциями оператора M^* будут в среднем плоские волны $\langle\varphi(\vec{r})\rangle = \varphi(\vec{q}) \exp(i\vec{q}\vec{r})$. Дисперсионное уравнение с учетом формулы (1) имеет вид:

$$q^2 = k^2 m_0\,(1-\gamma^*(q^2,\ \omega))^{-1}. \tag{2}$$

В объемном интеграле для $\gamma^*(q,\omega)$ перейдем к сферической системе координат и проинтегрируем по углам, тогда относительно корреляционной функции $R(\vec{r}) = \langle\gamma(\vec{x})\gamma(\vec{x}_1)\rangle$ при заданном $\gamma^*(q,\omega)$ получим интегральное уравнение

$$\gamma^*(q,\omega) = \int_0^\infty R(\vec{r}) \sin qr e^{ikm_0^{1/2} r}\, dr. \tag{3}$$

В неограниченной среде плоскости равных фаз и амплитуд собственных функций оператора M^* совпадают, поэтому

$$q = \kappa + i\delta. \tag{4}$$

Задавая $\gamma^*(q,\omega)$, получим из соотношения (2) уравнение относительно q, решив которое, найдем согласно формуле (4) $\kappa(\omega)$, $\delta(\omega)$. Зависимость $\delta(\omega)$ определяет затухание среднего поля $\langle\varphi\rangle$, а скорость $c = c(\omega)$ вычисляется по формуле $c = (d\kappa/d\omega)^{-1}$ [4].

Можно исходить из задания вида корней $q = q(\omega)$ и получить соответствующие выражения для $\gamma^*(q,\omega)$.

Определим вид корреляционной функции для среды, в которой отсутствует затухание среднего поля $\langle\varphi\rangle$ в некотором диапазоне частот. Для этого положим в уравнении (4) $\delta = 0$, тогда $Im\gamma^* = 0$.

Уравнение (2) решаем последовательными итерациями: в нулевом приближении $q^2 = k^2 m_0$, в первом приближении $q^2 = k^2 m_0\,(1-\gamma^*(k^2 m_0,\omega))^{-1}$. Уравнение (3) приводится к виду

$$\int_0^\infty R(r) \sin^2 k m_0^{1/2} r dr = 0. \tag{5}$$

В диапазоне частот $2\xi < 1$, $\xi = a\omega c_0^{-1} m_0^{-1/2}$ (a — средний размер неоднородности) решение уравнения (5) имеет вид:

$$R(r) = R_0 j_0(r/a); j_0(r/a) = (r/a)^{-1}\sin(r/a). \qquad (6)$$

Здесь $j_0(r/a)$ — сферическая функция Бесселя.

Во всем диапазоне рассматриваемых частот выражения для коэффициента затухания δ и скорости c собственной волны $\langle \varphi(\vec{r})\rangle = \varphi(\vec{q})\exp(i\vec{q}\vec{r})$ оператора M^* в среде, описываемой корреляционной функцией (6), имеют вид:

$$\text{при } 2\xi < 1 \quad \delta = 0; \quad c = \frac{c_0(1-4\xi^2)\Psi(2\xi)}{16 m_0^{1/2} N};$$

$$\psi(2\xi) = 16 - R_0 Q_0^0(2\xi); \quad N = 1-(4-R_0)\xi^2;$$

$$\text{при } 2\xi = 1 \quad \delta = c = 0;$$

$$\text{при } 1 < 2\xi \quad \delta = \frac{4R_0 m_0 \xi^2}{\psi^2((2\xi)^{-1} + (\pi R_0\xi)^2)};$$

$$c = \frac{c_0(4\xi^2-1)(\psi^2(2\xi)^{-1} + (\pi R_0\xi)^2)}{16 m_0^{1/2} N((\pi R_0\xi)^2 - \psi^2(2\xi)^{-1})};$$

$$Q_0^0(2\xi) = \xi\ln((1+2\xi)/(1-2\xi)).$$

Таким образом, среда, структура которой описывается корреляционной функцией (6), является фильтром частот. В окрестности $\xi = 0{,}5$ происходит запирание и волны не проходят. Численные исследования позволяют находить границы интервала запирания. Она зависит от концентрации наполнителя, флуктуации коэффициентов, характеризующих механические свойства среды. Корреляционной зависимостью вида (6) описываются среды, структура которых обладает периодичностью упругих свойств.

2. Рассмотрим теперь стохастически неоднородную упругую среду, в которой среднее поле перемещений $\langle u_i\rangle$ гармонической волны удовлетворяет уравнениям

$$(\Lambda^*_{ijkl}\langle u_k\rangle_{,l})_{,j} + \rho\omega^2\langle u_i\rangle = 0,$$

где $\Lambda^*_{ijkl} = \int \lambda^*_{ijkl}(x, x_1)\,dx_1$ — упругий оператор.

В статистически изотропной однородной среде существуют плоские и поперечные волны

$$\langle \vec{u}^a\rangle = \vec{u}^a(q_a)\, e^{i\vec{q}_a\vec{x}}, \quad a = l, t,$$

являющиеся собственными векторами упругого оператора Λ^*, а q_a удовлетворяют дисперсионным уравнениям

$$\Delta^{(a)}(q_a, \omega) = q_a^2 - \rho\omega^2\Lambda_a^{-1}(q_a, \omega) = 0. \tag{7}$$

Здесь $\Lambda_a(q_a, \omega)$ – спектр упругого оператора. Функции $\Lambda_a(q_a, \omega)$ выражаются через функцию $m^*(q, \omega)$ эталонной задачи. В силу этого корни дисперсионного уравнения (7) упругой задачи выражаются через корни дисперсионного уравнения (2) эталонной задачи. Таким образом, характер поведения среднего поля $< \varphi >$ в среде качественно аналогичен характеру поведения среднего поля $<u_i>$, различия связаны с поляризацией упругих волн. В среде, характеризуемой корреляционной функцией (6), существует диапазон частот, в котором отсутствует затухание среднего поля. При $2\xi_t < 1$ продольная и поперечная волны распространяются без затухания. В диапазоне $\xi_l + \xi_t < 1 < 2\xi_t$ продольная волна не затухает, а поперечная затухает. При $1 < 2\xi_l$ затухают продольная и поперечная волны $(\xi_a = a\omega c_a^{-1})$.

Корреляционная функция вида (6) описывает марковское случайное поле коэффициентов среды. Подобного вида корреляционная зависимость отмечена, например, в экспериментах для хаотически армированных стеклопластиков. При проектировании конструкций из композитных материалов необходимо учитывать влияние не только конструкционных параметров, но и случайный разброс коэффициентов, характеризующих упругие свойства материалов. Так, если при синтезе слоистого покрытия, свойства которого заданы в зависимости от колебаний, материал каждого слоя не должен в среднем влиять на затухание колебаний в низкочастотном диапазоне, то нужно брать материал слоев таким, чтобы структура описывалась корреляционной функцией (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М., 1976. – 367 с. 2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М., 1974. – 223 с. 3. Болотин В.В. О плотности параметрических резонансов. – Прикладная математика и механика, 1980, т, 44, вып. 6, с. 1087–1094. 4. Чигарев А.В. Распространение волн в упругой микронеоднородной среде. – Изв. АН СССР, МТТ, 1980, № 4, с. 128–135.

УДК 539.3

А.Е.КРУШЕВСКИЙ, канд. техн. наук (БПИ)

СЖАТИЕ (РАСТЯЖЕНИЕ) УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПРИ ЗАДАННЫХ НА КОНТУРЕ НАПРЯЖЕНИЯХ

Как известно, задача о равновесии упругого прямоугольника в замкнутом виде пока не решена. Метод Мусхелишвили требует разложения в степенной ряд интеграла Кристофеля-Шварца, осуществляющего конформное отображение прямоугольника на полуплоскость [1], и задача приводится к бесконечной системе алгебраических уравнений. При этом обнаруживается медленная сходимость результатов, особенно в угловых точках. Метод однородных решений [2] позволяет точно выполнить краевые условия на двух противоположных сторонах прямоугольника, а на двух других лишь приближенно.