

Рис. 1. Схема распределения сыпучего материала в цилиндре

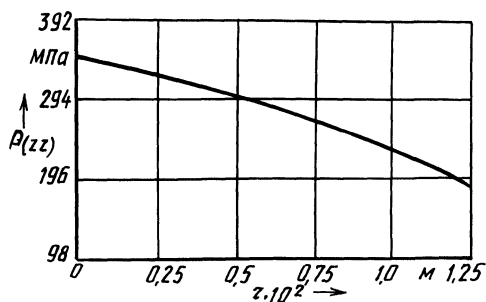


Рис. 2. Распределение давления p_{zz} при $z=h$

Получаем: $\lambda \sin(kh) / k f l_0 (\gamma R_1) = (1 - \cos(kh)) / k l_1 (\gamma R_1)$. Здесь $\gamma = k / \sqrt{\lambda}$.

Из этого уравнения определяется "k".

Важно знать распределение давления p_{zz} при $z = h$: $p_{zz} = M_2 \cos(kh) / l_0 \times (\gamma R_1)$. Например, при $F = 14$ кН, $\lambda = 0,2$, $f = 0,7$, $h = 0,009$ м эта зависимость имеет вид, изображенный на рис. 2.

УДК 531.3

М.А.ЛЕВИН, канд. техн. наук (БПИ)

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С КАЧЕНИЕМ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ШИРИНЫ ОБЛАСТИ КОНТАКТА ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА С ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В работе используется обобщение теории М.В.Келдыша (см. [1]), данное в публикациях автора [2]–[4]. Одной из особенностей этого обобщения является учет ширины области контакта между деформируемым колесом и опорной поверхностью. При этом рассматриваемый параметр оказывает существенное влияние на динамику систем с качением. При исследовании устойчивости движения указанных систем без учета ширины области контакта границы областей устойчивости могут определяться с заметной погрешностью. Покажем это на примере системы с самоориентирующимся колесом (рис.1).

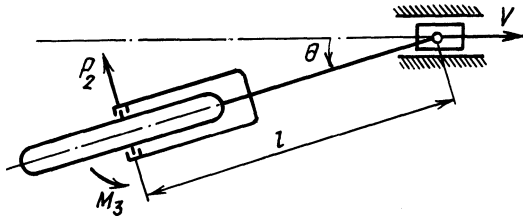


Рис. 1. Схема системы с самоориентирующимся колесом

Запишем уравнения системы с самоориентирующимся колесом и вертикальной стойкой, используя обозначения, приведенные в работе [2].

$$\begin{cases}
 \ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + P_2 l - M_3 = 0; \\
 P_2 = -f_2 \sigma_2; \quad M_3 = -f_{10} \sigma_0 + f_{11} \nu_2; \\
 d(u_2 - \sigma_2)/d\varphi = r(\nu_2 + \theta); \quad d(\nu_2 + \theta)/d\varphi = r(s_4 \sigma_2 - s_5 \nu_2); \\
 d(b\theta - \sigma_0)/d\varphi = r\nu_0; \quad d\nu_0/d\varphi = r(s_1 \sigma_0 - s_2 \nu_0); \\
 u_2 = -l\theta; \quad d/dt = v d/(r d\varphi),
 \end{cases} \quad (1)$$

где P_2, M_3 — боковая сила и стабилизирующий момент; φ — угол поворота колеса; $\sigma_0, \sigma_2, \nu_0, \nu_2$ — параметры деформации; $f_1, f_2, f_{10}, f_{11}, s_1, s_2, s_4, s_5$ — параметры колеса; v — скорость; r — радиус качения; θ — угол поворота стойки; l — момент инерции стойки вместе с колесом относительно вертикальной оси вращения; γ — коэффициент демпфирования; l — вынос колеса назад; $2b$ — ширина области контакта колеса ($f_{10} = f_1 b$, все остальные коэффициенты от $2b$ не зависят).

Введем безразмерные величины

$$\begin{cases}
 l_0 = lv^2 s_4 / f_{11}; \quad \xi = ls_4 / s_5; \\
 L_1 = f_1 b^2 s_4^2 / (s_5^2 f_2); \quad L_2 = f_{11} s_4^2 / (s_5^2 f_2); \\
 \xi_0 = 1 - 1 / (\xi + L_1 / (L_2 + \xi)); \\
 \mu_0 = s_4 / s_5^2; \quad \mu_1 = s_1 / s_4; \quad \mu_2 = s_2 / s_5; \\
 \gamma_0 = \gamma s_5 v / f_{11}, \text{ где } \xi \text{ — относительный вынос.}
 \end{cases} \quad (2)$$

Если использовать безразмерный параметр изображения по Лапласу $p_0 = qs_5 / (v s_4)$ вместо параметра q , входящего в интеграл $\bar{P}_2 = \int_0^\infty P_2(t) e^{-qt} dt$, то характеристическое уравнение системы (1) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \rho_0 (\rho_0^2 \mu_0 + \rho_0 + 1) (\rho_0^2 \mu_0 + \rho_0 \mu_2 + \mu_1) (I_0 \rho_0 + \gamma_0) + \\
 & + (\rho_0^2 \mu_0 + \rho_0 \mu_2 + \mu_1) (\rho_0^2 (1 + \xi^2 / L_2) + (1 + \rho_0 \xi) (1 + \xi / L_2) / \mu_0) + \quad (3) \\
 & + L_1 \rho_0 (\rho_0 + \mu_2 / \mu_0) (\rho_0^2 \mu_0 + \rho_0 + 1) / L_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Границы областей устойчивости найдем с помощью метода D -разбиений [5]. С этой целью характеристическое уравнение (3) представим в форме

$$\left. \begin{aligned}
 & I_0 + \gamma_0 / \rho_0 + F(\xi, \rho_0) = 0; \\
 & F(\xi, \rho_0) = \frac{\rho_0^2 (1 + \xi^2 / L_2) + (1 + \xi / L_2) (1 + \rho_0 \xi) / \mu_0}{\rho_0^2 (\rho_0^2 \mu_0 + \rho_0 + 1)} + \\
 & + L_1 \frac{\rho_0 + \mu_2 / \mu_0}{\rho_0 (\rho_0^2 \mu_0 + \rho_0 \mu_2 + \mu_1) L_2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

После подстановки $\rho_0 = i\omega$ в уравнение (4) с одновременным отделением действительной и мнимой частей получаем:

$$I_0 + d_0(\omega) + d_1(\omega)\xi + d_2(\omega)\xi^2 = 0; \quad (5)$$

$$- \gamma_0 / \omega + g_0(\omega) + g_1(\omega)\xi + g_2(\omega)\xi^2 = 0, \quad (6)$$

где $d_0(\omega) + ig_0(\omega) = F(0, i\omega)$; $d_1(\omega) + ig_1(\omega) = (F(1, i\omega) - F(-1, i\omega)) / 2$; $d_2(\omega) + ig_2(\omega) = (F(1, i\omega) + F(-1, i\omega)) / 2 - F(0, i\omega)$.

Для каждого значения ω из уравнения (6) находится ξ , а затем в соответствии с выражением (5) определяется I_0 . Описанный алгоритм реализован на ЭВМ.

Единственный коэффициент L_1 , который зависит от ширины области контакта, линейно входит в выражения для коэффициентов $d_0(\omega)$ и $g_0(\omega)$ уравнений (5) и (6). Это позволяет без затруднений строить D -разбиение в плоскости параметров I_0 и L_1 при каждом значении ξ . Аналогичным образом и еще проще находится D -разбиение в плоскости параметров I_0 и γ_0 при заданном ξ .

Исследование устойчивости системы (1) оказывается наиболее простым и не требующим использования ЭВМ в частном случае, если $\gamma = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$ (т.е. если $s_1 = s_4$, $s_2 = s_5$). Последнее характерно, например, для деформируемой периферии колеса с линейной зависимостью между перемещениями и распределенными усилиями в области контакта. Такая модель периферии была рассмотрена в [6], причем, как было показано, $s_1 = s_4 = 3/a^2$; $s_2 = s_5 = 3/a$, где $2a$ — длина области контакта.

Таким образом, в рассматриваемом частном случае характеристическое уравнение (3) может быть записано в виде

$$(q^2 + vs_5q + v^2s_4)(a_4q^4 + a_3q^3 + a_2q^2 + a_1q + a_0) = 0, \quad (7)$$

где

$$a_0 = v^2(f_{11}s_4 + f_2s_5l); \quad a_1 = v(f_{11}s_4l + f_1b^2s_5 + f_2s_5l^2);$$

$$a_2 = f_{11} + f_1b^2 + f_2l^2 + lv^2s_4; \quad a_3 = lvs_5, \quad a_4 = l.$$

Сомножитель в виде полинома второго порядка в уравнении (7) всегда устойчив, так как имеет корни только с отрицательной действительной частью. Воспользовавшись критерием Гурвица, из рассмотрения второго сомножителя, являющегося полиномом четвертого порядка, находим условие устойчивости

$$((f_{11}s_4 + f_2s_5l)(s_4l - s_5)s_5 + f_1b^2s_5^2s_4)lv^2 + f_{11}(f_{11}s_4 + f_2s_5l) \times$$

$$\times (s_5 - s_4l)l + f_{11}b^2s_5f_1(s_5 - s_4l) > 0,$$

которое принимает компактную форму

$$l_0 > (\xi - 1)/\xi_0 \quad \text{при } \xi_0 > 0;$$

$$l_0 < (\xi - 1)/\xi_0 \quad \text{при } \xi_0 < 0.$$

Из рассмотрения данного частного случая видно, что условие устойчивости зависит от ширины области контакта $2b$, которая входит в выражение для

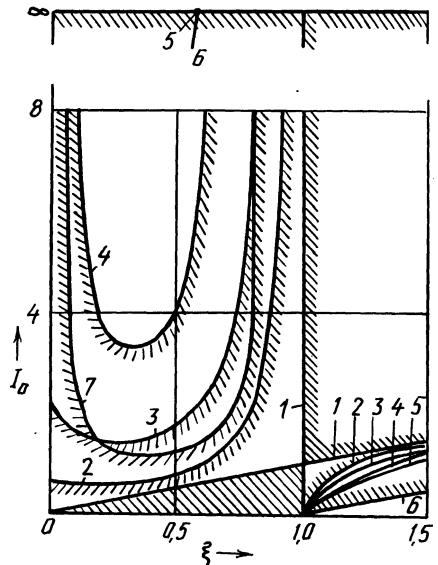


Рис. 2. D-разбиение в плоскости параметров l_0, ξ в зависимости от L_1 :
 1 - $L_1 = 2b = 0$; 2 - $L_1 = 0,106$;
 3 - $L_1 = 0,211$; 4 - $L_1 = 0,317$; 5 -
 $L_1 = 0,423$; 6 - $L_1 = \infty$; 7 - $L_1 =$
 $= 0,211$ (2...6 - при $s_1 = s_4$; $s_2 =$
 $= s_5$ или $\mu_1 = \mu_2 = 1$; $L_2 = 0,3$; 7 - при
 $\mu_0 = 0,268$; $\mu_1 = 0,681$; $\mu_2 = 0,891$; $L_2 =$
 $= 0,202$) (штриховка границы обращена
 в сторону области устойчивости
 движения)

ξ_0 . Если принять, что ширина пренебрежимо мала и $2b = L_1 = 0$, то получается известное условие устойчивости [1], [5]:

$$l_0 > \xi \quad \text{при } \xi > 1,$$

$$l_0 < \xi \quad \text{при } \xi < 1.$$

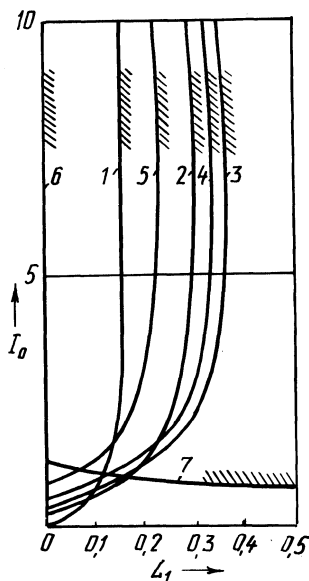


Рис. 3. D -разбиение в плоскости параметров l_0, L_1 в зависимости от ξ (при $\mu_0 = 0,268$; $\mu_1 = 0,681$; $\mu_2 = 0,891$; $L_2 = 0,202$):

$$1 - \xi = 0; 2 - \xi = 0,2; 3 - \xi = 0,4;$$

$$4 - \xi = 0,6; 5 - \xi = 0,8; 6 - \xi = 1,0;$$

$$7 - \xi = 1,2 \text{ (штриховка границы обращена в сторону области устойчивости движения)}$$

На рис. 2 приведена диаграмма устойчивости, построенная в плоскости параметров l_0 и ξ в функции от L_1 при нулевом демпфировании ($\gamma = 0$). На рис. 3 показаны результаты определения на ЭВМ границ областей устойчивости в плоскости параметров l_0 и L_1 в функции от ξ с учетом указанных параметров шины для автомобиля МАЗ и при нулевом демпфировании ($\gamma = 0$).

Из приведенных результатов следует, что ширина области контакта оказывает заметное влияние на процесс качения и должна приниматься во внимание при расчетах. Влияние этого параметра экспериментально подтверждается известным фактом значительно большей устойчивости качения двух заблокированных колес, которые можно рассматривать как одно колесо с большей шириной области контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. К е л д ы ш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. — Тр. ЦАГИ, 1945, № 564, с. 33.
2. Л е в и н М.А. Определение реакций связей катящегося деформируемого колеса. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6, с. 75—86.
3. Л е в и н М.А. Понижение порядка зависимостей для реакции связей катящегося деформируемого колеса. — Докл. АН БССР, 1974, т. 18, № 6, с. 516—519.
4. Л е в и н М.А. Некоторые результаты исследования реакций связей деформируемого колеса. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1973, с. 3—17.
5. Н е й м а р к Ю.И., Ф у ф а е в Н.А. Динамика неголономных систем. — М., 1967. — 519 с.
6. Л е в и н М.А. О реакциях связей упругого колеса при качении. — Докл. АН БССР, 1972, т. 16, № 5, с. 414—417.