

2. Зададим $F(t)$. Пусть сила изменяется циклически, T — время одного цикла

$$F(t) = F_{\max}/2(1 - \cos(2\pi t/T)).$$

При этом $F(T) = 0$; $u(T) = 0$, и если в этот момент сила $F(t)$ будет снята, то подвижная граница будет остановлена.

Проведя вычисления по формуле (22), получим $\bar{h}(\bar{t})$. На рис. 4 представлена зависимость безразмерной толщины слоя \bar{h} от безразмерного времени \bar{t} при $F_{\max} = 1$ для разных чисел Деборы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш у л ь м а н З.П., З а л ь ц г е н д л е р Э.А. Погружение конуса с большим углом раскрытия в концентрический сосуд с жидкостью. В кн.: Теоретическая и инструментальная реология, Минск, 1970, т. 1, с. 8—57. 2. Ш у л ь м а н З.П., А л е й н и к о в С.М., Х у с и д Б.М. Переходные процессы при сдвиговых течениях вязкоупругих жидкостей. III. Упругий возврат. — ИФЖ, 1982, т. 43, с. 234—238. 3. Ш у л ь м а н З.П., А л е й н и к о в С.М., Х у с и д Б.М. О явлении упругого возврата для соосноцилиндрического вискозиметра в неизотермическом режиме постоянного момента. — ДАН БССР, 1982, т. 26, № 6, с. 513—516. 4. Ш у л ь м а н З.П., Х у с и д Б.М., Ш а б у н и н а З.А. Движение упруговязкой жидкости в трубе после снятия перепада давления. — ИФЖ, 1983, т. 45, с. 850—854. 5. Ш у л ь м а н З.П., Х у с и д Б.М. Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. — Минск, 1983, с. 73—78, 90—98.

УДК 532.516

О.Н.ВЯРЬВИЛЬСКАЯ, канд. физ.-мат. наук,
В.В.ВИДЯКИН (БГУ)

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО СДАВЛИВАНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ С УЧЕТОМ ПРОНИЦАЕМОСТИ И СКОЛЬЖЕНИЯ

В статье приняты обозначения: p_0, ρ_0, T_0, μ_0 — характерные давление, плотность, температура, динамическая вязкость; p, ρ, T, μ — безразмерные давление, плотность, температура, динамическая вязкость; u, v — безразмерные компоненты скорости; V — скорость движения верхней пластины; H — толщина смазочного слоя; L — ширина пластин; k — коэффициент проницаемости нижней пластины; $n = kp_0/V$ — безразмерный коэффициент проницаемости; λ — коэффициент скольжения; $\alpha = \lambda\mu_0/H$ — безразмерный коэффициент скольжения; $Re = \rho_0 VH/\mu_0$ — число Рейнольдса; $M = V\sqrt{\rho_0/p_0}$ — число Маха; $Pr = \mu_0 c_p/k$ — число Прандтля; κ — коэффициент теплопроводности; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; $\epsilon = H/L$ малый безразмерный параметр.

Решается плоская задача о неизотермическом сдавливании вязкого газа между параллельными пластинами, которая может рассматриваться как одна из возможных моделей пористого упорного подшипника с внешним надду-

вом. В отличие от предположений, принятых в [3], [4], [7] нижняя пластина считается перфорированной и скорость просачивания на ней принимается пропорциональной избыточному давлению [2], учитывается скольжение газа вдоль пластин. Решение полученного в работе уравнения для давления проведено двумя способами: методом численного интегрирования и представлением через эллиптические интегралы в форме Лежандра 1-го и 3-го рода. Проведен качественный и количественный анализ влияния исходных параметров задачи на кинематические и динамические характеристики процесса.

Переходя в определяющей системе уравнений баланса количества движения, массы, энергии, а также в уравнении состояния и зависимости вязкости от температуры к безразмерным переменным, полагая $Re \sim \epsilon$, $M^2 \sim \epsilon^3$, $Pr \sim \epsilon^0$, $\alpha \sim \epsilon^0$, $n \sim \epsilon^0$ и сохраняя в уравнениях только члены порядка ϵ^0 , получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0; \quad (4)$$

$$p = \rho T; \quad (5)$$

$$\mu = \sigma T. \quad (6)$$

Здесь $\sigma = cT_0/\mu_0$; c — коэффициент принятой линейной зависимости вязкости от температуры.

Граничные условия частичного скольжения [5], проницаемости на перфорированной нижней плоскости и заданного распределения температур на пластинах в безразмерных переменных примут вид:

при $y = 0$

$$u = \alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (7)$$

$$v = -n(p - p_a); \quad (8)$$

при $y = 1$

$$T = T_1(x); \quad (9)$$

$$u = -\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (10)$$

$$v = -1; \quad (11)$$

$$T = T_2(x); \quad (12)$$

$$\text{при } x = \pm \frac{1}{2} \\ \rho = \rho_a. \quad (13) - (14)$$

Интегрируя уравнение (4) с учетом (6) (9), (12), получим выражение, определяющее поле температуры:

$$T = ((T_2^2(x) - T_1^2(x))y + T_1^2(x)) \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Из уравнения (1), принимая во внимание условия (2), (7), (10) и полученное выражение (15), найдем:

для $T_1(x) \neq T_2(x)$

$$u = \frac{2}{3\sigma} \frac{dp}{dx} \left(\frac{\sqrt{\xi_1 y + \xi_2}}{\xi_1^2} (\xi_1 y - \xi_3) + \xi_4 \right); \quad (16)$$

для $T_1(x) = T_2(x) = T(x)$

$$u = \frac{1}{2\sigma T} \frac{dp}{dx} (y^2 - y - \alpha\sigma T), \quad (17)$$

где $\xi_1(x) = T_2^2 - T_1^2$; $\xi_2(x) = T_2^2$; $\xi_5(x) = \left(\frac{3}{2} \alpha(T_1 + T_2) + \frac{1}{\sigma} \frac{T_2 + 2T_1}{T_2 + T_1} \right) \times$
 $\times \left(\alpha(T_2 + T_1) + \frac{1}{\sigma} \right)^{-1}$; $\xi_3(x) = 2T_1^2 + \xi_1 \xi_5$; $\xi_4(x) = \frac{2T_1^3}{\xi_1^2} + \xi_5 \left(\frac{T_1}{\xi_1} - 3\alpha \right)$.

Из уравнения (3) с учетом соотношений (5), (16), (17) и (8):

для $T_1(x) \neq T_2(x)$

$$v = -\frac{2}{3\sigma} \frac{\sqrt{\xi_1 y + \xi_2}}{p} \left(\left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + p \frac{d^2 p}{dx^2} \right) \left(\frac{y}{\xi_1^2} \left(\frac{\xi_1 y}{2} - \xi_3 \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\xi_4}{\xi_1} \left(\sqrt{\xi_1 y + \xi_2} - \sqrt{\xi_2} \right) \right) + p \frac{dp}{dx} \left(\frac{d\xi_4}{dx} y - \frac{2}{\xi_1^3} \frac{d\xi_1}{dx} \left(\frac{\xi_1 y}{2} - \xi_3 \right) \times \right. \\ \left. \times y + \frac{y}{\xi_1^2} \left(\frac{d\xi_1}{dx} \frac{y}{2} - \frac{d\xi_3}{dx} \right) \right) + \frac{3\sigma n}{2\sqrt{\xi_2}} (p^2 - p_a p);$$

для $T_1(x) = T_2(x) = T(x)$

$$v = -\frac{1}{2\sigma T p} \left(\left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + p \frac{d^2 p}{dx^2} \right) \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \alpha\sigma T y \right) - \\ - \frac{p}{T} \frac{dp}{dx} \frac{dT}{dx} \left(\frac{2y^3}{3} - y^2 - \alpha\sigma T y \right) - n(p - p_a).$$

Граничное условие (11) определяет основное уравнение для давления

$$p \frac{d^2 p}{dx^2} + \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \Omega_1(x) p \frac{dp}{dx} + \Omega_2(x) p^2 + \Omega_3(x) p = 0. \quad (18)$$

Рассматривая случай, когда на пластинах поддерживаются постоянные температуры T_{10} и T_{20} , из уравнения (18) получим:

$$p \frac{d^2 p}{dx^2} + \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \Omega_2 p^2 + \Omega_3 p = 0, \quad (19)$$

где Ω_i — известные постоянные.

Общее решение уравнения (19) имеет вид

$$x + C = \int_{p_a}^p (p dp / \sqrt{\frac{\Omega_2}{2} p^4 - \frac{2\Omega_3}{3} p^3 + A}), \quad (20)$$

где A и C — постоянные интегрирования, для определения которых имеем граничные условия (13) — (14)

Заменим A новой неизвестной p^* (учитывая, что при $x = 0$ $dp/dx = 0$ и $p = p^* = \sup p(x)$), $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, которая определится интегральным соотношением

$$\int_{p_a}^{p^*} (p dp / \sqrt{\frac{\Omega_2}{2} (p^4 - p^{*4}) - \frac{2\Omega_3}{3} (p^3 - p^{*3})}) = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

С помощью выражений (20), (21) на ЭВМ ЕС-1022 была рассчитана зависимость $p(x)$, графики которой для различных параметров задачи приведены на рис. 1. Влияние основных параметров процесса на несущую способность P , объемный расход через перфорированную поверхность Q_n и коэффициент расходов $q = Q_n / Q_6$ демонстрируется в табл. 1. Увеличение температуры

Таблица 1.

Влияние коэффициентов проницаемости и скольжения на несущую способность подшипника и объемные расходы ($\mu = 3/4$)

n	a	p	Q_n	q
0,2	0,333	0,3494	0,0698	0,0666
	0,083	0,6439	0,1288	0,1361
	0,000	0,8600	0,1720	0,2197
0,35	0,334	0,3314	0,1160	0,1171
	0,083	0,5467	0,1913	0,2390
	0,000	0,7229	0,2530	0,3935
0,5	0,333	0,3009	0,1504	0,1657
	0,083	0,5079	0,2539	0,3466
	0,000	0,6220	0,3110	0,5668

неподвижной пластины приводит к росту несущей способности (рис. 1в), что вполне согласуется с выводами [4]. Математическое подтверждение этого факта можно получить, исследуя фазовые траектории уравнения (19). Максимально возможное для данного процесса давление будет выражаться соотношением

$$p_{кр}^* = p_a + 1/(\pi\tau),$$

где $\tau = T_{20}/T_{10}$ (с ростом τ значение p^* уменьшается).

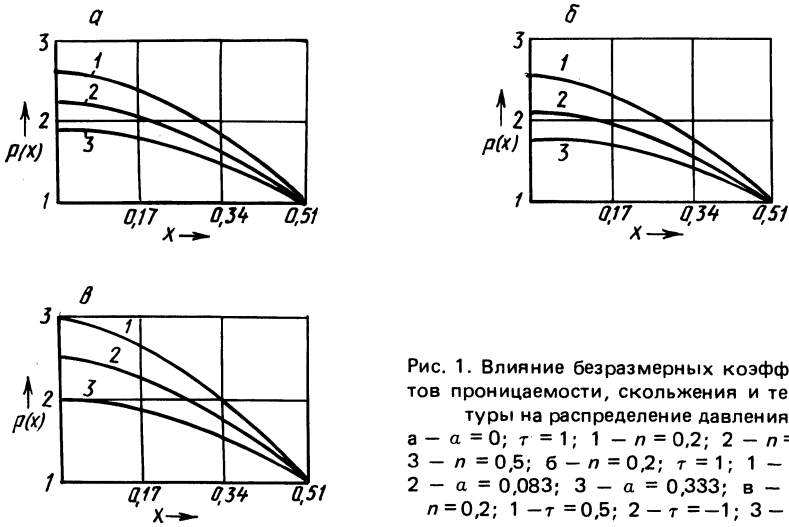


Рис. 1. Влияние безразмерных коэффициентов проницаемости, скольжения и температуры на распределение давления:

а - $\alpha = 0$; $\tau = 1$; 1 - $n = 0,2$; 2 - $n = 0,35$; 3 - $n = 0,5$; б - $n = 0,2$; $\tau = 1$; 1 - $\alpha = 0$; 2 - $\alpha = 0,083$; 3 - $\alpha = 0,333$; в - $\alpha = 0$; $n = 0,2$; 1 - $\tau = 0,5$; 2 - $\tau = -1$; 3 - $\tau = 3$

Воспользовавшись общей теорией эллиптических интегралов и данными, содержащимися в [6], правая часть равенства (20) приведем к выражению, содержащему эллиптические интегралы 1-го и 3-го рода. Тогда общее решение уравнения (19) можно представить в виде

$$x = \theta \left(\frac{n_1^2}{n_2^2 - 1} \Pi(\varphi, \frac{1}{1 - n_1^2}, m) + \frac{\gamma - \chi/4}{\eta - \gamma} F(\varphi, m) - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2}{(1 - n_1^2)(1 + n_2^2)}} \ln \left| \frac{t^{*2} - 1}{t^2 - 1} x \right. \right) \quad (22)$$

$$x \frac{\frac{1}{2}(n_2^2 - n_1^2)(t^2 + 1) - n_1^2 n_2^2 + t^2 - \sqrt{(1 - n_1^2)(1 + n_2^2)}(t - n_1^2)(t^2 + n_2^2)}{\frac{1}{2}(n_2^2 - n_1^2)(t^{*2} + 1) - n_1^2 n_2^2 + t^{*2}} \Big|),$$

$$\begin{aligned}
 &\text{где } \chi = 4\Omega_3 / (3\Omega_2); \quad \varphi = \arccos(n_1/t), \quad m = n_2 / \sqrt{n_1^2 + n_2^2}; \quad b = -3\chi^2/16 + a^2/2 + \\
 &+ \chi^3/(16a); \quad d = -3\chi^2/16 + a^2/2 - \chi^3/(16a); \quad \eta = \frac{1}{2} \left(-\frac{\chi^3}{8a^2} - \sqrt{\frac{\chi^6}{64a^4} - \frac{3}{4}\chi^2 + 2a^2} \right); \\
 &\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\chi^3}{8a^2} + \sqrt{\frac{\chi^6}{64a^4} - \frac{3}{4}\chi^2 + 2a^2} \right); \quad t = \frac{\gamma - \rho - \frac{\chi}{4}}{\rho + \frac{\chi}{4} - \eta}; \quad \rho^* = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} - \\
 &- \frac{\chi}{4}; \quad n_1^2 = -\frac{\gamma^2 - a\gamma + b}{\eta^2 - a\eta + b}; \quad n_2^2 = \frac{\gamma^2 + a\gamma + d}{\eta^2 + a\eta + d}; \quad \theta = (\eta - \gamma)^2 \left(\frac{1}{2}\Omega_2 (\eta^2 - a\eta + b) \times \right. \\
 &\left. \times (\eta^2 + a\eta + d) (n_1^2 + n_2^2) \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Здесь a — произвольная постоянная интегрирования, которая определяется из граничного условия (13) и удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\begin{aligned}
 &\Pi(\varphi_a, \frac{1}{1-n_1^2}, m) + \frac{(\chi/4 - \gamma)(1-n_1^2)}{(\eta-\gamma)n_1^2} F(\varphi_a, m) + \\
 &+ \frac{1-n_1^2}{4n_1^2} \sqrt{\frac{n_1^2+n_2^2}{(1-n_1^2)(1-n_2^2)}} \ln \left| \frac{t^{*2}-1}{t_a^2-1} \times \right. \\
 &\left. \times \frac{\frac{1}{2}(n_2^2-n_1^2)(t_a^2+1) - n_1^2 n_2^2 + t_a^2 - \sqrt{(1-n_1^2)(1+n_2^2)}(t_a^2-n_1^2)(t_a^2+n_2^2)}{\frac{1}{2}(n_2^2-n_1^2)(t^{*2}+1) - n_1^2 n_2^2 + t^{*2}} \right| = \\
 &= \frac{1-n_1^2}{a\theta n_1^2}. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Для решения уравнения (23) использовались таблицы из справочника [1]. Графики зависимостей $\rho(x)$, построенные по формуле (22), практически не отличаются от приведенных на рис. 1. Максимальная относительная погрешность не превышает 4%. Однако использование представления решения в виде (22) не требует применения ЭВМ.

Полученные аналитические и численные результаты позволяют судить о влиянии на движение вязкого газа трех важных параметров: коэффициентов проницаемости n , скольжения a , а также температурного коэффициента τ . Так, с ростом n и τ уменьшаются несущая способность подшипника и расход через боковые сечения, с ростом a уменьшается несущая способность, увеличивается боковой расход. Влияние скольжения наиболее существенно проявляется при малых значениях коэффициента проницаемости n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М.Абрамовиц и И.Стиган. — М., 1979. — с. 832. 2. Александрова С.Г. Исследование картины течения вязкой жидкости в широком криволиней-

ном клине с пористой граничной поверхностью. — Тр. Моск. ин-та химич. машиностр., 1972, вып. 47, с. 108—112. 3. Г о р л а Р. Характеристика теплообмена в пористом упорном подшипнике. — Проблемы трения и смазки, 1979, № 4, с. 155—159. 4. К о н с т а н т и н е с к у В. О влиянии теплообмена между поверхностями как вторичного эффекта в газовой смазке. — Проблемы трения и смазки, 1969, № 1, с. 219—223. 5. М у р т и Р. Влияние скольжения в коротких пористых подшипниках. — Проблемы трения и смазки, 1973, № 4, с. 128—134. 6. П р у д н и к о в А.П., Б р ы ч к о в Ю.А., М а р и ч е в О.И. Интегралы и ряды. — М., 1981. — с. 797. 7. С л е з к и н Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. — М., 1955. — с. 515.

УДК 539.3

А.Х.КИМ, д-р. техн. наук,
Г.С.СОКОЛОВСКИЙ, Т.Ф.БОГИНСКАЯ (БПИ)

ПРЕССОВАНИЕ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ В ЦИЛИНДРАХ

Прессование сыпучих материалов в цилиндрических насадках осуществляется под большим усилием. При этом от распределения давлений внутри прессуемого материала зависит качество готового изделия.

Допустим, что сыпучий материал в цилиндре (рис. 1) подвергается сжатию поршнем под действием силы F . Требуется определить распределение давления внутри цилиндра. В процессе прессования вследствие возникновения распорного усилия происходит трение материала о стенки цилиндра. Уравнения равновесия в цилиндрических координатах в предположении, что напряженное состояние симметрично относительно оси цилиндра, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= p_{\varphi\varphi}; \\ p_{r\varphi} &= p_{z\varphi} = 0; \\ \frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial p_{rz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial p_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{p_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

В качестве третьего уравнения воспользуемся часто применяемым в механике сыпучих сред соотношением

$$p_{rr}/p_{zz} = \lambda = \text{const} \quad (\lambda < 1),$$

где λ — коэффициент бокового распора.

Исключив из уравнений (1) p_{rz} , получим:

$$\lambda = \frac{\partial p_{zz}}{\partial r} - \frac{1}{r} \int \frac{\partial^2 p_{zz}}{\partial z^2} dr = 0.$$