

$$\frac{1}{K(s)} = \frac{\mu_B}{s(1-\mu_0) + \mu_0}; \quad s_i = \mu_0 \frac{s_{vi}}{Q_i} / (1 + \mu_0 - 1) \frac{Q_{vi}}{Q_i}; \quad \mu_0 = \frac{\mu_B}{\mu_H}.$$

Полученные результаты отличаются от ранее известных тем, что в них уже учтены граничные условия на произвольно размещенных скважинах при изучении фильтрационных процессов в пластах конечных размеров. Это позволяет исключить трудоемкие расчеты, связанные с соблюдением сложных дополнительных условий при течении неоднородных жидкостей в много-связной области фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсенин В.Я. Математическая физика. — М., 1966. — 367 с. 2. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — М., 1972. — 288 с. 3. Данилов В.Л., Кац Р.М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде. — М., 1980. — 264 с. 4. Швидлер М.И., Данилов В.Л. О расщеплении задач многомерной фильтрации несжимаемых жидкостей. — ДАН СССР, 1973, т. 211, № 5, с. 1077—1078.

УДК 532.5:532.135

Е.Н.ЛАМБИНА, канд. физ.-мат. наук,
Б.И.ЛАПУШИНА, канд. техн. наук (БПИ)

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ КОНУСАМИ

Рассматривается течение вязкоупругой несжимаемой среды, описываемой реологическим уравнением

$$\bar{S} = 2 \int_0^t \mu(t - \xi) \bar{E}(\xi) d\xi, \quad (1)$$

где \bar{S} и \bar{E} — тензоры избыточных напряжений и скоростей деформаций соответственно; $\mu(t)$ — функция релаксации.

Движение начинается из состояния покоя за счет сообщения одной из границ скорости $u(t)$. При этом находящаяся в зазоре среда либо вытесняется из пространства между границами (рис. 1), либо растекается между ними (рис. 2).

Определяются течение среды в зависимости от скорости подвижной границы $u(t)$; сила $F(t)$, действующая на подвижную границу при заданном законе изменения толщины слоя $h(t)$; характер изменения толщины зазора при заданной силе $F(t)$. Течение предполагается медленным. Задача решается в безынерционном приближении. Необходимым условием допустимости такого приближения является отсутствие скачков скорости $u(t)$ и силы $F(t)$ в процессе движения подвижной границы. В частности, должны выполняться условия

$$u(0) = 0; \quad F(0) = 0; \quad u(T) = 0, \quad (2)$$

где T — время движения границы до остановки.

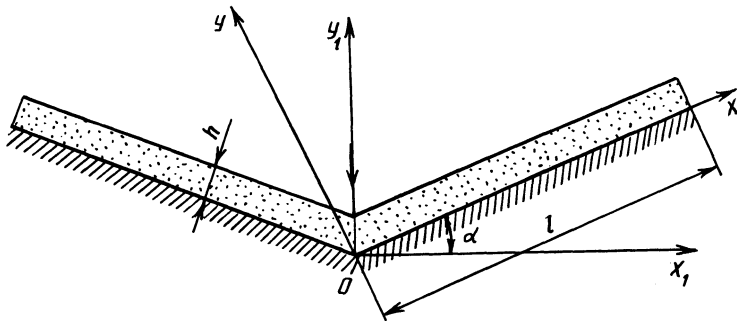


Рис. 1. Схема течения (вытеснение среды из зазора)

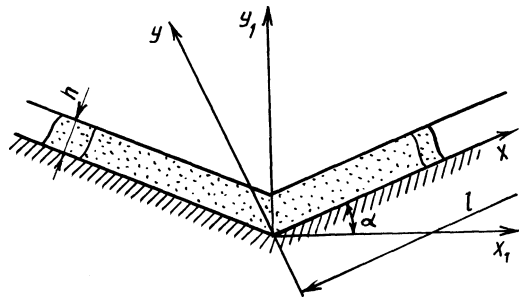


Рис. 2. Схема течения (рас-
текание среды)

В такой постановке решаются задачи плоского течения в узком зазоре между двугранными углами и осесимметричного течения между круговыми конусами.

Рассмотрим плоское течение в зазоре со сближающимися границами. Уравнение (1) решается совместно с уравнением движения, которое при пренебрежении массовыми силами имеет вид

$$\operatorname{div} \bar{S} = 0, \quad (3)$$

и уравнением неразрывности

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (4)$$

Решая совместно уравнения (1) и (3), получим:

$$\operatorname{grad} p = \int_0^t \mu(t-\xi) \Delta \bar{v}(\xi) d(\xi), \quad (5)$$

где p — избыточное давление; Δ — оператор Лапласа.

Уравнение (5) является аналогом уравнения Стокса $\operatorname{grad} p = \eta \Delta \bar{v}$ при отсутствии массовых сил.

В координатной форме будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \int_0^t \mu (t - \xi) \Delta v_x(\xi) d\xi; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \int_0^t \mu (t - \xi) \Delta v_y(\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} (6)$$

Исключая из формулы (6) p , получим:

$$\int_0^t \mu (t - \xi) L(\xi) d\xi = 0, \quad (7)$$

$$\text{где } L = \frac{\partial}{\partial y} \Delta v_x - \frac{\partial}{\partial x} \Delta v_y.$$

Из выполнимости выражения (7) для любого t следует, что $L = 0$.

Совместно с уравнением (4) получаем систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \Delta v_x - \frac{\partial}{\partial x} \Delta v_y &= 0; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} (8)$$

Уравнения (8) тождественны соответствующим уравнениям для вязкой жидкости.

Течение рассматривается в области $x_1 \geq 0$. Граничными условиями для скоростей будут условия прилипания

$$\left. \begin{aligned} v_x |_{y=0} &= 0; & v_y |_{y=0} &= 0; \\ v_x |_{y=h} &= -u \sin \alpha; & v_y |_{y=h} &= -u \cos \alpha. \end{aligned} \right\} (9)$$

Кроме того,

$$v_{x_1} |_{x_1=0} = 0. \quad (10)$$

Решая задачу приближенно, условие (10) можно заменить интегральным соотношением

$$\int_0^{h/\cos \alpha} v_{x_1} |_{x_1=0} dy_1 = 0. \quad (11)$$

Система уравнений (8) легко интегрируется при естественном предположении независимости скорости v_y от x .

Решение, удовлетворяющее граничным условиям (9) и (11), имеет вид

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{6x}{h} (y/h - y^2/h^2) u(t) \cos \alpha - (4u/h - 3y^2/h^2) u(t) \sin \alpha; \\ v_y &= -(3y^2/h^2 - 2y^3/h^3) u(t) \cos \alpha. \end{aligned} \right\} (12)$$

Уравнения (12) не зависят от функции релаксации и описывают, в частности, течение ньютоновской жидкости. Определим давление вязкой жидкости, интегрируя уравнения Стокса. Заменяя второе соотношение уравнений Стокса соотношением $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, общепринятым в гидродинамической теории смазки, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \eta \Delta v_x; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Интегрируя систему уравнений (13) при граничном условии $p = 0$, находим:

$$p = 6 \left((l^2 - x^2)/h^2 \right) \cos \alpha - ((l-x)/h) \sin \alpha \left(\eta/h \right) u(t).$$

Определим силу $F(t)$ для вязкой жидкости:

$$F = 2b \int_0^l p \cos \alpha dx,$$

где b — ширина области течения.

Пренебрегая отношением h/l по сравнению с единицей, получим:

$$F(t) = 8(l^3 b/h^3) \eta u(t) \cos^2 \alpha. \quad (14)$$

Из сопоставления реологических уравнений для вязкоупругой среды и ньютоновской жидкости и одинаковости их скоростей следует, что для вязкоупругой среды сила $F(t)$ определяется при помощи интеграла свертки:

$$F(t) = 8b \cos^2 \alpha \int_0^t \frac{l^3}{h^3} \mu(t-\xi) u(\xi) d\xi, \quad (15)$$

где $h = h_0 - \int_0^t u(t) dt$.

В выражении (15) $l = l_0$ в случае вытеснения среды из зазора и $l = l_0 h_0 / h$ в случае ее растекания.

Поскольку $u(t) = -\frac{dh}{dt}$, из формулы (15) получим:

$$F(t) = 4b l_0^3 \cos^2 \alpha \int_0^t (t-\xi) d\left(\frac{1}{h^2}\right) \quad (16)$$

в задаче вытеснения и

$$F(t) = 1,6 b l_0^3 h_0^3 \cos^2 \alpha \int_0^t \mu(t-\xi) d\left(\frac{1}{h^5}\right) \quad (17)$$

в задаче растекания.

Для среды Максвелла функция релаксации

$$\mu(t) = \eta/\tau \exp(-t/\tau),$$

где η — вязкость; τ — время релаксации. В этом случае формулы (16) и (17) преобразуются к виду

$$F(t) = 4(\eta/\tau) b l_0^3 \cos^2 \alpha \exp(-t/\tau) \int_0^t \exp(t/\tau) d(1/h^2) \quad (18)$$

при вытеснении среды и

$$F(t) = 1,6 \frac{\eta}{\tau} l_0^3 h_0^3 b \cos^2 \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) d\left(\frac{1}{h^5}\right) \quad (19)$$

при ее растекании.

Определяем $h(t)$ при заданной силе $F(t)$. В этом случае соотношения (16), (17) представляют собой интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода для неизвестных функций $(1/h^2)'$ и $(1/h^5)'$. После решения этих уравнений $h(t)$ в каждом случае может быть найдена при помощи одной квадратуры.

Отметим, что при произвольной функции релаксации нельзя получить решение уравнений (16), (17) в замкнутой форме.

Рассмотрим решение для среды Максвелла. Уравнение (18) перепишем в виде

$$\frac{\tau F(t) \exp(t/\tau)}{4\eta b l_0^3 \cos^2 \alpha} = \int_0^t \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \left(\frac{1}{h^2}\right)' \cdot dt. \quad (20)$$

Продифференцировав выражение (20) по t , получим дифференциальное уравнение для $h(t)$:

$$(1/h^2)' = (F(t) + \tau F'(t)) / (4\eta b l_0^3 \cos^2 \alpha). \quad (21)$$

Интегрируя уравнение (21), находим:

$$h = h_0 \left(1 + h_0^2 \frac{S(t) + \tau F(t)}{4\eta b l_0^3 \cos^2 \alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

где $S = \int_0^t F(t) dt$ — импульс силы $F(t)$.

Аналогично при растекании среды

$$h = h_0 \left(1 + h_0^2 \frac{S(t) + \tau F(t)}{1,6\eta b l_0^3 \cos^2 \alpha}\right)^{-\frac{1}{5}}. \quad (23)$$

Рассмотрим осесимметричное течение вязкоупругой среды наследственно-го типа в зазоре между сближающимися конусами. Введем систему координат x, y, φ [1], где ось x направлена вдоль образующей конуса, ось y перпендикулярна x . Движение рассматривается в области $y \leq x \operatorname{ctg} \alpha$ (см. рис. 1.2).

Записывая уравнения (1), (3), (4) в этой системе координат и решая их в приближении гидродинамической теории смазки при граничных условиях, аналогичных условиям (9), (11), получаем:

$$\begin{aligned} v_x &= (3x/h) (y/h - y^2/h^2) u(t) \cos \alpha - (3y^2/h^2 - 2y^3/h^3) u(t) \sin \alpha; \\ v_y &= -(3y^2/h^2 - 2y^3/h^3) u(t) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения (24), как и (12), не зависят от функции релаксации и описывают, в частности, течение ньютоновской жидкости.

Так же, как в случае плоского течения, определяем давление p и силу $F(t)$, действующую на подвижный конус, сначала для вязкой жидкости.

Интегрируя уравнения $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{6\eta}{h^3} u(t) \cos \alpha(x)$ и $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ при граничном условии $p|_{x=l} = 0$, находим:

$$p = 3(\eta/h)(l^2 - x^2)/h^2 u(t) \cos \alpha. \quad (25)$$

Сила $F(t)$ для вязкой жидкости определится из уравнения $F(t) = \int_0^l 2\pi x p|_{y=h} \cos \alpha dx$. Получим:

$$F(t) = (3\pi\eta^4/2h^3) u(t) \cos^2 \alpha. \quad (26)$$

Для вязкоупругой среды силу $F(t)$ определяем при помощи интеграла свертки

$$F(t) = \frac{3\pi}{2} \cos^2 \alpha \int_0^t \frac{l^4}{h^3} \mu(t-\xi) u(\xi) d\xi, \quad (27)$$

где $l = l_0$ в случае вытеснения среды из зазора и $l^2 = l_0^2 h_0/h$ в случае ее растекания. С учетом соотношения $u(t) = -\frac{dh}{dt}$ получим:

$$F(t) = \frac{3\pi}{4} \cos^2 \alpha l_0^4 \int_0^4 \mu(t-\xi) d\left(\frac{1}{h^2}\right) \quad (28)$$

в задаче вытеснения и

$$F(t) = \frac{3}{8} \pi l_0^4 h_0^2 \cos^2 \alpha \int_0^t \mu(t-\xi) d\left(\frac{1}{h^4}\right) \quad (29)$$

в задаче растекания.

Для среды Максвелла формулы (28) и (29) запишутся в виде

$$F(t) = \frac{3\pi}{4} \cos^2 \alpha \frac{h_0^4 \eta}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \int_0^t \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) d\left(\frac{1}{h^2}\right) \quad (30)$$

при вытеснении среды и

$$h = h_0 \left(1 + 8h_0^2 (\tau F(t) + S(t)) / (3\pi^4 \eta \cos^2 \alpha)\right)^{-\frac{1}{4}} \quad (31)$$

в случае ее растекания.

Определяя для модели Максвелла $h(t)$ при заданной силе $F(t)$, получим:

$$h = h_0 \left(1 + \frac{4h_0^2 (\tau F(t) + S(t))^{-\frac{1}{2}}}{3\pi^4 \eta \cos^2 \alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (32)$$

в случае вытеснения среды и

$$h = h_0 \left(1 + \frac{8h_0^2 (\tau F(t) + S(t))^{-\frac{1}{4}}}{3\pi^4 \eta \cos^2 \alpha}\right)^{-\frac{1}{4}} \quad (33)$$

при ее растекании.

Проведем анализ полученных решений.

Остановимся на случае вытеснения среды из зазора между сближающимися плоскими конусами. При этом время T движения подвижной границы конечно, а $h(t)$ изменяется монотонно. Будем иметь $u(0) = 0$; $u(t)|_{0 < t < T} \geq 0$; $u(t)|_{t \geq T} = 0$.

Тогда из выражения (15) следует:

$$F(t)|_{t \geq T} = 8b \cos^2 \alpha \int_0^T \frac{h^3}{h^3} \mu(t-\xi) u(\xi) d\xi. \quad (34)$$

Так как подынтегральное выражение в формуле (34) больше нуля или равно нулю, то

$$F(t)|_{x \geq T} > 0. \quad (35)$$

Таким образом, однонаправленное движение подвижной границы может быть остановлено только при последующем действии силы $F(t)$, изменяющейся по закону (34). При этом релаксация напряжений в среде будет происходить синхронно с силой $F(t)$, а скорости, согласно решению (12), будут равны нулю.

Очевидно, снятие силы $F(t)$ в момент остановки подвижной границы эквивалентно приложению к покоящейся границе противоположно направленной силы, которая вызовет ее обратное движение. Будет иметь место "упругий возврат" — явление, исследованное в работах [2–5] для ротационных и сдвиговых течений в трубах.

Далее рассмотрим случай вытеснения вязкоупругой среды из зазора между плоскими конусами при заданной силе $F(t)$, действующей конечное

время T . При этом $F(0) = 0$; $F(t)|_{t < T} > 0$; $F(t)|_{t > T} = 0$. Из формулы (34) следует:

$$\int_0^T \frac{t^3}{h^3} \mu(t-\xi) u(\xi) d\xi = 0. \quad (36)$$

Условие (36) выполнимо только при перемене знака $u(t)$ в интервале времени T . Следовательно, будет существовать интервал времени $T_1 < T$ "упругого возврата", когда подвижная граница будет двигаться противоположно действию силы F . Из сравнения соотношений (16) и (17) видно, что явление "упругого возврата" будет иметь место и в случае растекания среды. Аналогичный вывод следует из анализа осесимметричного течения вязкоупругого слоя между конусами.

В качестве примера приведем расчеты для случая вытеснения вязкоупругой среды Максвелла из зазора между плоскими конусами.

Введем безразмерные параметры: $\bar{\tau} = \tau/T$ (число Деборы); $\bar{F}_{\max} = F_{\max} \times Th_0^2 / (8\eta_0^3 b \cos^2 \alpha)$ и безразмерные переменные $\bar{t} = t/T$; $\bar{h} = h/h_0$; $\bar{F}(t) = F(t) \times h_0^2 T / (6\eta b^3 \cos^2 \alpha (h_0^2/h_1^2 - 1))$.

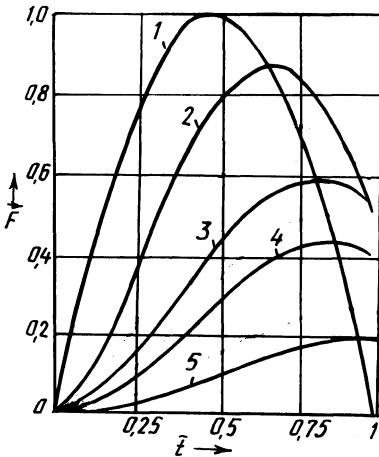


Рис. 3. Изменение во времени силы, действующей на подвижный конус, при различном времени релаксации: 1 - $\tau = 0$; 2 - $\tau = 0,2$; 3 - $\tau = 0,6$; 4 - $\tau = 1$; 5 - $\tau = 3$

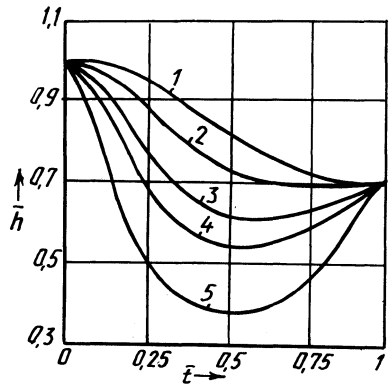


Рис. 4. Изменение во времени толщины зазора при различном времени релаксации ($\bar{F}_{\max} = 1$): 1 - $\tau = 0$; 2 - $\tau = 0,2$; 3 - $\tau = 0,6$; 4 - $\tau = 1$; 5 - $\tau = 3$

1. Зададим $h(t)$. Пусть $h = h_0 (1 + 6(h_0^2/h_1^2 - 1)(t^2/(2T^2) - t^3/(3T^3)))^{-0,5}$. При этом выполняются условия $u(0) = 0$; $u(T) = 0$; $h(T) = h_1$. Проведя интегрирование по выражению (18), получим $F(t)$. Зависимость безразмерной силы \bar{F} от безразмерного времени \bar{t} для разных чисел Деборы представлена на графиках (рис. 3).

2. Зададим $F(t)$. Пусть сила изменяется циклически, T — время одного цикла

$$F(t) = F_{\max}/2(1 - \cos(2\pi t/T)).$$

При этом $F(T) = 0$; $u(T) = 0$, и если в этот момент сила $F(t)$ будет снята, то подвижная граница будет остановлена.

Проведя вычисления по формуле (22), получим $\bar{h}(\bar{t})$. На рис. 4 представлена зависимость безразмерной толщины слоя \bar{h} от безразмерного времени \bar{t} при $F_{\max} = 1$ для разных чисел Деборы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш у л ь м а н З.П., З а л ь ц г е н д л е р Э.А. Погружение конуса с большим углом раскрытия в концентрический сосуд с жидкостью. В кн.: Теоретическая и инструментальная реология, Минск, 1970, т. 1, с. 8—57. 2. Ш у л ь м а н З.П., А л е й н и к о в С.М., Х у с и д Б.М. Переходные процессы при сдвиговых течениях вязкоупругих жидкостей. III. Упругий возврат. — ИФЖ, 1982, т. 43, с. 234—238. 3. Ш у л ь м а н З.П., А л е й н и к о в С.М., Х у с и д Б.М. О явлении упругого возврата для соосноцилиндрического вискозиметра в неизотермическом режиме постоянного момента. — ДАН БССР, 1982, т. 26, № 6, с. 513—516. 4. Ш у л ь м а н З.П., Х у с и д Б.М., Ш а б у н и н а З.А. Движение упруговязкой жидкости в трубе после снятия перепада давления. — ИФЖ, 1983, т. 45, с. 850—854. 5. Ш у л ь м а н З.П., Х у с и д Б.М. Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. — Минск, 1983, с. 73—78, 90—98.

УДК 532.516

О.Н.ВЯРЬВИЛЬСКАЯ, канд. физ.-мат. наук,
В.В.ВИДЯКИН (БГУ)

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО СДАВЛИВАНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ С УЧЕТОМ ПРОНИЦАЕМОСТИ И СКОЛЬЖЕНИЯ

В статье приняты обозначения: p_0, ρ_0, T_0, μ_0 — характерные давление, плотность, температура, динамическая вязкость; p, ρ, T, μ — безразмерные давление, плотность, температура, динамическая вязкость; u, v — безразмерные компоненты скорости; V — скорость движения верхней пластины; H — толщина смазочного слоя; L — ширина пластин; k — коэффициент проницаемости нижней пластины; $n = kp_0/V$ — безразмерный коэффициент проницаемости; λ — коэффициент скольжения; $\alpha = \lambda\mu_0/H$ — безразмерный коэффициент скольжения; $Re = \rho_0 VH/\mu_0$ — число Рейнольдса; $M = V\sqrt{\rho_0/p_0}$ — число Маха; $Pr = \mu_0 c_p/k$ — число Прандтля; κ — коэффициент теплопроводности; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; $\epsilon = H/L$ малый безразмерный параметр.

Решается плоская задача о неизотермическом сдавливании вязкого газа между параллельными пластинами, которая может рассматриваться как одна из возможных моделей пористого упорного подшипника с внешним надду-