$$+ \rho l \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial t^2} - z = 0;$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} l(G_0(x,t) \frac{\partial \varphi_0(x,t)}{\partial x} - \int_0^t R_G(x,t-\tau) \frac{\partial \varphi_0(x,\tau)}{\partial x} d\tau) +$$

$$+ \rho l \frac{\partial^2 \varphi_0(x,t)}{\partial t^2} - h = 0;$$

$$- l \frac{\partial}{\partial x}(E_0(x,t) \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial x^2} - \int_0^t R_E(x,t-\tau) \frac{\partial^2 w_0(x,\tau)}{\partial x^2} d\tau) - Q = 0,$$

$0 \leqslant x \leqslant l \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = l \end{cases}$ (принцип затвердевания);

$$l(E_0(x,t) \frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t R_E(x, t-\tau) \frac{\partial^2 w_0(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau) - M = 0$$

при $x = 0, x = l$;

$$l(G_0(x,t) \frac{\partial \varphi_0(x,t)}{\partial x} - \int_0^l R_G(x,t-\tau) \frac{\partial \varphi_0(x,\tau)}{\partial x} d\tau) - H = 0$$

при $x = 0$, $x = l$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С к л я р О.Н. Вариационный вывод уравнений равновесия для вязкоупругой среды. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика, Минск, 1985, № 12, с. 118—122. 2. Б е р е з о в с к и й А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. — Ч. 1. — Киев, 1974. — 444 с. 3. И о н о в В.И., О г и б а л о в П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. Ч. 1. — М., 1979. — 384 с. 4. Р а б о т н о в Ю.Н Элементы наследственной механики твердых тел. — М., 1977. — 384 с.

УДК 622.276.14:552.54.001

Р.В.ШАЙМУРАТОВ, канд. техн. наук (ГГУ)

ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЙ И НАСЫЩЕННОСТЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Известно, что нелинейность фильтрации однородных и неоднородных жидкостей и деформация карбонатных пород в основном локализуется вблизи источников возмущения потока. Вне этих областей течение жидкостей подчиняется линейным законам фильтрации в недеформируемых средах. Поскольку размеры зон, приходящихся на окрестности источников возмущения, малы по сравнению с оставшейся (основной) областью течения, ниже при изучении процессов вытеснения нефти водой в пластах с трещиноватыми коллекторами воспользуемся основными положениями теории линейной упругой двухфазной фильтрации. При этом учтем, что капиллярные силы, действующие на контакте несмешивающихся фаз в карбонатных средах, в большинстве случаев меньше перепада пластового давления между точками потока, а относительные фазовые проницаемости для воды $f_в(s)$ и нефти $f_н(s)$ с достаточной точностью для практики могут быть аппроксимированы линейными функциями

$$f_в(s) = a_1 s + b_1, \ f_н(s) = a_2 s + b_2 \tag{1}$$

водонасыщенности s [2].

Движение каждой из фаз (вода, нефть) в неоднородном продуктивном пласте без учета капиллярного давления $p_к$ характеризуется соответствующими скоростями фильтрации:

$$\vec{v}_в = -k f_в(s)/\mu_в \nabla p = -kK_в(s)\nabla p; \tag{2}$$

$$\vec{v}_н = -kf_н(s)/\mu_н = -kK_н(s)\nabla p. \tag{3}$$

Здесь $k = k(x, y)$ — известная зависимость проницаемости среды от координат x, y точки M области фильтрации D; $\mu_в, \mu_н$ — вязкость соответственно воды и нефти; ∇p — градиент пластового давления $p(x, y, t)$; t — время. Если толщина продуктивного слоя объекта разработки достаточно велика, то при учете гравитационных сил вместо p следует положить

$$П = p + \rho q H,$$

где ρ — средняя плотность водонефтяной смеси; g — ускорение свободного падения; H — превышение точки M над плоскостью нулевого гравитационного потенциала.

Для получения замкнутой системы уравнений относительно неизвестных функций $p(M, t)$ и $s(M, t)$ запишем уравнения неразрывности для обеих фаз:

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{v}_в = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{R} Q_{вi}\,\delta(M - M_i); \tag{4}$$

$$-m\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{v}_н = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{R} Q_{нi}\,\delta(M - M_i). \tag{5}$$

При выводе уравнений (4), (5) жидкости и среда считаются несжимаемыми; m, h — соответственно мощность и толщина пласта; δ — дельта-функция Дирака; $M_i \in D$ — точка размещения i-й скважины; $Q_{вi}, Q_{нi}$ — дебиты i-й скважины (соответственно воды, нефти); R — общее число скважин. При нумерации скважин и установлении числа R необходимо учесть, что $Q_{нi}$ на нагнетательных скважинах равен нулю, $Q_{вi}$ на добывающих скважинах до прорыва воды также равны нулю; дебиты добывающих и нагнетательных скважин отличаются сооветственно знаком плюс и минус.

Единственное решение выписанных уравнений получим при известных дополнительных условиях на границе Г области D, в частности при

$$p(M,t)\,|_{\Gamma} = p_0 = \mathrm{const}; \quad \frac{\partial p(M,t)}{\partial n}\,|_{\Gamma} = 0, \tag{6}$$

где n — нормаль к Г, а также при начальном распределении водонасыщенности в $\overline{D} = D \cup \Gamma$:

$$s(M,0) = f(M). \tag{7}$$

В известных публикациях уравнения неразрывности (4), (5), как правило, выписываются без правых частей. При этом в более общей постановке исходная начально-краевая задача разлагается на отдельные задачи по определению p и s [4], детальному изучению которых посвящена книга [3].

Ниже рассмотрим схему расчета вытеснения нефти водой, когда возмущения, вносимые в поток из-за дополнительных условий на скважинах, учитываются непосредственно в исходных уравнениях (4), (5). Для установления возможности последовательного исследования полей пластовых давлений $p(M,t)$ и насыщенностей $S(M,t)$ выполним ряд преобразований этих уравнений. Сложим их:

$$\mathrm{div}(\vec{v}_{\text{в}} + \vec{v}_{\text{н}}) = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{R} Q_i \delta(M-M_i)$$

и с учетом формул (2), (3) преобразуем левую часть полученного выражения:

$$\mathrm{div}(\vec{v}_{\text{в}} + \vec{v}_{\text{н}}) = -\nabla(kK(s)\,\nabla p) = -K(s)\nabla(k\nabla p) -$$

$$- kK'(s)\nabla p, \nabla s), \tag{8}$$

где $k(s) = K_{\text{в}}(s) + K_{\text{н}}(s)$, $Q_i = Q_{\text{в}i} + Q_{\text{н}i}$ — суммарный дебит i-й скважины.

Отсюда

$$\nabla(k\,\nabla p) = \Phi, \; \Phi = -\frac{kK'(s)}{K(s)}(\nabla p, \; \nabla s) -$$

$$- \frac{1}{hK(s)}\sum_{i=1}^{R} Q_i \delta(M-M_i). \tag{9}$$

Решение уравнения (9) вместе с граничным условием (6) будем искать в виде

$$p = \varphi + u. \tag{10}$$

Здесь φ удовлетворяет уравнению

$$\nabla(k\,\nabla p) = 0 \tag{11}$$

в области D и условию (6) на границе Г; u — решение уравнения (9) при соответствующем однородном граничном условии на Г.

Если известна функция Грина G_{MN} $(M, N \in D)$ краевой задачи для φ, то учитывая свойства дельта-функции [1] при нахождении решения u уравнения Пуассона (9), приходим к следующему интегральному представлению искомой функции p:

$$p = \varphi + \iint_{(D)} \Phi(N) G_{MN}\, dN = \varphi - \iint_{(D)} \left(k \frac{K'(s)}{K(s)} (\nabla p, \nabla S)\right)_N G_{MN} dN -$$

$$- \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{R} \frac{Q_i}{K(s_i)} G_{MM_i}, \tag{12}$$

где s_i — водонасыщенность на i-й скважине.

Представив выражения (2) — (5) в виде

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = kK'_в (\nabla s, \nabla p) + K_в \nabla(k \nabla p) + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{R} Q_{вi}\, \delta(M - M_i); \tag{13}$$

$$-m \frac{\partial s}{\partial t} = kK'_н (\nabla s, \nabla p) + K_н \nabla (k \nabla p) + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{R} Q_{нi}\, \delta(M - M_i), \tag{14}$$

умножим формулу (13) на $K_н(s)$, формулу (14) — на $K_в(s)$, вычтем одно уравнение из другого и с учетом $Q_в = K_в Q/K$, $Q_н = K_н Q/K$ выразим скалярное произведение $(\nabla p, \nabla s)$ через неизвестную функцию водонасыщенности

$$(\nabla p, \nabla s) = \frac{mK(s)}{kT(s)} \frac{\partial s}{\partial t}; \quad T(s) = K'_н K_в - K'_в K_н. \tag{15}$$

Вычислив градиент давления (12) с учетом выражения (15) и подставив его в это выражение, получим интегродифференциальное уравнение относительно $s(M,t)$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{kT(s)}{K(s)} \iint_{(D)} \left(\frac{K'(s)}{T(s)} \frac{\partial s}{\partial t}\right)_N (\nabla G_{MN}, \nabla s)\, dN =$$

$$= \frac{kT(s)}{mhK(s)} \sum_{i=1}^{R} \frac{Q_i}{K(s_i)} (\nabla G_{MM_i}, \nabla s) - \frac{kT(s)}{mk(s)} (\nabla \varphi, \nabla s). \tag{16}$$

Единственное решение последнего уравнения находится при соблюдении начального условия (7), затем задача об определении поля пластовых давлений $p(M, t)$ сводится к вычислению интеграла, входящего в выражение (12).

Заметим, что в основных соотношениях (12), (16) могут быть использованы любые дифференцируемые функции $f_в(s)$, $f_н(s)$. С учетом функций (1) применительно к карбонатным средам эти соотношения будут иметь наиболее простой вид.

В частности, когда $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = -1$, $b_2 = 1$, в выражениях (12), (16)

$$\frac{T(s)}{K(s)} = -\frac{1}{s(\mu_н - \mu_в) + \mu_в}; \quad \frac{K'(s)}{T(s)} = \mu_в - \mu_н; \quad \frac{K'(s)}{K(s)} = \frac{1 - \mu_0}{s(1 - \mu_0) + \mu_0};$$

$$\frac{1}{K(s)} = \frac{\mu_в}{s(1-\mu_0)+\mu_0}; \quad s_i = \mu_0 \frac{s_{вi}}{Q_i} / (1+\mu_0 - 1) \frac{Q_{вi}}{Q_i}; \quad \mu_0 = \frac{\mu_в}{\mu_н}.$$

Полученные результаты отличаются от ранее известных тем, что в них уже учтены граничные условия на произвольно размещенных скважинах при изучении фильтрационных процессов в пластах конечных размеров. Это позволяет исключить трудоемкие расчеты, связанные с соблюдением сложных дополнительных условий при течении неоднородных жидкостей в многосвязной области фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсенин В.Я. Математическая физика. — М., 1966. — 367 с. 2. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — М., 1972. — 288 с. 3. Данилов В.Л., Кац Р.М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде. — М., 1980. — 264 с. 4. Швидлер М.И., Данилов В.Л. О расщеплении задач многомерной фильтрации несжимаемых жидкостей. — ДАН СССР, 1973, т. 211, № 5, с. 1077—1078.

УДК 532.5:532.135

Е.Н.ЛАМБИНА, канд. физ.-мат. наук,
Б.И.ЛАПУШИНА, канд. техн. наук (БПИ)

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ КОНУСАМИ

Рассматривается течение вязкоупругой несжимаемой среды, описываемой реологическим уравнением

$$\overline{S} = 2 \int_0^t \mu(t-\xi)\,\overline{\dot{E}}(\xi)\,d\xi, \tag{1}$$

где $\overline{S}$ и $\overline{\dot{E}}$ — тензоры избыточных напряжений и скоростей деформаций соответственно; $\mu(t)$ — функция релаксации.

Движение начинается из состояния покоя за счет сообщения одной из границ скорости $u(t)$. При этом находящаяся в зазоре среда либо вытесняется из пространства между границами (рис. 1), либо растекается между ними (рис. 2).

Определяются течение среды в зависимости от скорости подвижной границы $u(t)$; сила $F(t)$, действующая на подвижную границу при заданном законе изменения толщины слоя $h(t)$; характер изменения толщины зазора при заданной силе $F(t)$. Течение предполагается медленным. Задача решается в безынерционном приближении. Необходимым условием допустимости такого приближения является отсутствие скачков скорости $u(t)$ и силы $F(t)$ в процессе движения подвижной границы. В частности, должны выполняться условия

$$u(0) = 0; \quad F(0) = 0; \quad u(T) = 0, \tag{2}$$

где T — время движения границы до остановки.