ЛИТЕРАТУРА

1. К л ю ш н и к о в В.Д. Математическая теория пластичности. — М., 1979. — 208 с.
2. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М., 1966. — 707 с.

УДК 539.4:678.067.5

В.П.СТАВРОВ, д-р техн. наук (ГПИ)

О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ПРОЧНОСТИ СТЕКЛОВОЛОКНИТОВ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ МАКРОСТРУКТУРЫ

Для управления структурой стекловолокнитов в изделиях с целью создания оптимальных конструкций необходимо определить соотношения, позволяющие рассчитать упругие характеристики и прочность материала в изделии [1], [2]. Прогнозирование прочности стекловолокнитов (в общем случае — построение предельной поверхности) представляет собой более сложную задачу, чем прогнозирование их упругих свойств. Это объясняется тем, что не только напряжения в элементе, но и его прочностные свойства зависят от его ориентации. Для построения предельной поверхности необходимо знать законы распределения прочностных характеристик элементов и напряжений в них. Кроме того, необходимо задать функцию поврежденности, определяющую вероятность локальных повреждений (разрушения элементов), которая соответствует макроскопическому разрушению при данном напряженном состоянии.

Особенность стекловолокнитов состоит в том, что как действующие, так и разрушающие напряжения в элементах структуры являются случайными величинами.

В статистической теории прочности обычно либо действующие, либо предельные напряжения предполагаются детерминированными [3]. В некоторых вариантах статистической теории пластичности и прочности выводятся макроскопические условия пластичности и разрушения для сред с элементами, имеющими детерминированные свойства, но ориентированными случайным образом в пространстве. Ниже излагается метод прогнозирования прочности стекловолокнитов, позволяющий одновременно учесть случайный характер ориентации элементов структуры и их неоднородность.

Макроструктуру стекловолокнитов составляют пучки нитей, прядей, пропитанных связующим [1]. Допустим, ориентация макроэлементов в пространстве задана плотностью распределения $f_{\theta,\varphi,\psi}(u, v, t)$ углов Эйлера (θ, φ, ψ), определяющих положение системы координат x'_1, x'_2, x'_3, связанной с элементом (ось x'_3 направлена вдоль нитей), по отношению к системе координат (x_1, x_2, x_3), связанной с изделием. Разрушающее напряжение для элемента структуры зависит от угла между направлениями элемента (осью x'_3) и напряжения.

Ограничимся рассмотрением случаев, когда растяжение-сжатие происходит вдоль одной из осей симметрии структуры (x_1, x_2 или x_3). Согласно формуле, предложенной А.Л.Рабиновичем [4], прочность элемента при растяжении под углом α к его направлению

$$\sigma_\alpha = (p_{33}^*\lambda_*)/(\lambda_*\cos^4\alpha + 2B_*\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha),$$

где $\lambda_* = p_{11}^*/p_{33}^*$; $B_* = B(1+\beta)$; $\beta = (\lambda - \lambda_*)/(1-\lambda)$; $2B = 4E_1^0/E_{45}^0 - 1 - \lambda$; $\lambda = E_1^0/E_3^0$.

Здесь p_{11}^*, p_{33}^* — разрушающие напряжения для элемента при растяжении его вдоль осей x_1' и x_3' соответственно; E_1^0, E_3^0 и E_{45}^0 — модули Юнга для элемента при растяжении его вдоль осей x_1', x_3' и под углом 45° к этим осям.

При растяжении вдоль оси x_i $\cos\alpha = \cos(x_i, x_3')$, т.е. $\cos\alpha$, а следовательно, и γ_α зависит от углов θ и φ, распределение которых известно.

Напряжение, действующее на элемент, также зависит от ориентации этого элемента. При вычислении растягивающих напряжений в элементе воспользуемся приближением Хилла [5], согласно которому напряжение принимается равным среднему арифметическому значений, соответствующих моделям Фойгта и Рейсса.

По Фойгту деформации элементов одинаковы: $e = S\cdot\cdot p$, где S — тензор упругих податливостей. Тогда напряжения в элементе $\sigma = \theta\cdot\cdot e$, или $\sigma = \theta\cdot\cdot S\cdot\cdot p$, где θ — модули упругости элемента в системе координат x_i.

По Рейссу напряжения в элементах одинаковы и равны p. Соответствующие им деформации $\epsilon = \Pi\cdot\cdot p$, где Π — тензор упругих податливостей элемента в системе координат x_i.

В приближении Хилла напряжения в элементах структуры

$$\sigma = 0{,}5\,(I + \theta\cdot\cdot S)\cdot\cdot p. \tag{1}$$

Здесь I — единичный тензор, $I\cdot\cdot p = p$.

Согласно полученной формуле, случайные напряжения в элементах, так же как и σ_α, вполне определяются распределением элементов структуры по ориентациям.

При наличии повреждений нагрузка передается более прочным элементам. Если θ_* — модули упругости элементов при условии, что $\sigma_* < \sigma_\alpha$; $S_* = \langle\theta_*\rangle^{-1}$ — упругие податливости композита с повреждениями, то разрушающее напряжение p_* находится из условия

$$p_* = \max \iiint\limits_{\sigma_* < \sigma_\alpha} \frac{1}{2}\,(\theta_*\cdot\cdot S_* + I)\cdot\cdot p f_{\theta,\varphi,\psi}(u, v, t)\,du\,dv\,dt. \tag{2}$$

Физический смысл этого условия заключается в том, что в момент разрушения средние напряжения в неразрушенных еще элементах структуры достигают наибольшего значения. Аналогичное условие используется для расчета прочности системы параллельных волокон [6], однако при этом дополнительно предполагается, что напряжения во всех волокнах одинаковы.

Формула (2) выведена из условия, что происходит перераспределение нагрузки после разрушения наиболее "слабых" элементов. Имеющиеся экспериментальные данные [1], [6], [7] позволяют принять для описания прочности стекловолокнитов гипотезу "слабого звена", т.е. полагать, что разрушение происходит, если растягивающие напряжения хотя бы в одном из элементов достигнут предельного значения. В этом случае прогнозирование прочности сводится к решению задач, типичных для статистики экстремальных значений.

При равномерной ориентации макроэлементов в плоскости x_1x_2 прочность стекловолокнитов при растяжении в направлении x_2 определяет элемент, для которого угол φ наименьший. Учитывая, что сам угол φ при этом мал, запишем формулу (1) в виде

$$\sigma_\varphi = p^*_{11}\,(1 - 2B_*\varphi^2/\lambda_*)\,. \tag{3}$$

Угол φ в рассматриваемом случае — равномерно распределенная величина, поэтому

$$<\varphi> = \frac{\pi}{2(n+1)};\quad D_\varphi = \frac{\pi^2 n}{4(n+1)^2(n+2)};\quad <\varphi^2> = \frac{\pi^2}{2(n+1)(n+2)},$$

где n — число элементов.

Применяя к формуле (3) оператор математического ожидания, находим, что среднее значение прочности

$$<\sigma_\varphi> = p^*_{11}\,(1 - \pi^2 B_*/(\lambda_*(n+1)(n+2))). \tag{4}$$

Подставив в формулу (4) значения постоянных упругости и разрушающего напряжения p^*_{11}, найденные экспериментально [1], получим зависимость средней прочности стекловолокнита от свойств и числа макроэлементов, ориентированных случайным образом.

Из формулы (4) непосредственно вытекает зависимость среднего значения прочности от числа элементов в изделии (масштабный эффект). Относи-

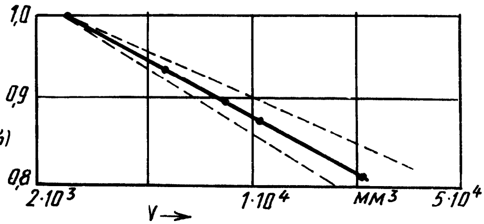

Рис. 1. Зависимость относительного изменения разрушающего напряжения ϵ_σ при растяжении стекловолокнита АГ-4В от объема образца V: штриховые линии — границы прогнозируемых значений; точки — экспериментальные данные

тельное снижение прочности стекловолокнита АГ-4В, рассчитанное по формуле (4), согласуется с экспериментальными данными Е.И.Спепанычева [7], однако расчетные значения разрушающего напряжения получаются меньше экспериментальных. Это свидетельствует о том, что физический смысл понятия "слабого звена" нуждается в уточнении. Если принять в качестве элемента микроструктуры элемент сечением 50 мм^2, то удовлетворительным оказывается и количественное соответствие (рис. 1). Значит, за разрушение стекловолокнитов ответственны так называемые надмакроструктурные образования, содержащие пучки нитей. Этот вывод вполне согласуется с результатами экспериментального исследования прочности изделий из стекловолокнитов, изложенными в книге [1].

Таким образом, предложенный здесь метод прогнозирования прочности позволяет установить закономерности влияния макронеоднородности на прочность стекловолокнитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д е д ю х и н В.Г., С т а в р о в В.П. Прессованные стеклопластики. – М., 1976. – 272 с. 2. С т а в р о в В.П. Управление качеством машиностроительных изделий из стекловолокнитов. – Весцi АН БССР. Сер. фiз.-тэхн. навук. 1981, № 4, с. 56–61. 3. Б о л о т и н В.В. Статистические методы в строительной механике. 2-е изд. – М., 1965. – 279 с. 4. Р а б и н о в и ч А.Л. Об упругих постоянных и прочности анизотропных материалов. – Тр. ЦАГИ, 1946, № 582, с. 1–56. 5. Х и л л Р. Упругие свойства составных сред. Некоторые теоретические принципы: Пер. с англ. – Механика, 1964, № 5, с. 127–143. 6. Н е м е ц Я., С е р е н с е н С.В. Прочность пластмасс. – М., 1970. – 335 с. 7. С т е п а н ы ч е в Е.И. Прочность стеклопластмасс в связи с влиянием эксплуатационных и конструкционных факторов: Дис. ...канд. техн. наук. – М., 1965. – 122 с.

УДК 539.4

А.В.ЧИГАРЕВ, канд. физ-мат. наук (БПИ)

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ЗАДАННЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Проектирование материалов с заданными свойствами может быть осуществлено за счет синтеза соответствующей структуры. Учет структуры среды в рамках модели неоднородного тела проводится с помощью подходящего выбора коэффициентов [1], а для композитов со случайным разбросом свойств за счет , например, корреляционных функций параметров среды. Задача нахождения корреляционной (структурной) функции среды по заданному среднему характеру колебаний является обратной и приводит к интегральному уравнению первого рода [2]. Задание корней дисперсионного уравнения эквивалентно заданию средней реакции композитной среды на колебательные воздействия [3].

Рассмотрим сначала задачу нахождения корреляционной функции среды, обладающей заданными динамическими свойствами в акустическом приближении. В этом случае распространение колебаний в среде описывается уравнением Гельмгольца. Эта задача является эталонной для упругой среды [4], и дальше будет показана ее связь с упругой задачей.

1. Среднее поле $<\varphi>$ в случайно неоднородной среде удовлетворяет эталонному операторному уравнению Гельмгольца

$$\Delta<\varphi>+k^2 m_0 M^*<\varphi> = 0.$$

Здесь $M^* = \int m^*(\vec{x}-\vec{x}_1)\,d\vec{x}_1$ – интегральный оператор, ядро которого $m^*(\vec{x}-\vec{x}_1)$ для статистически изотропной однородной среды является разностным. Спектр