

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-Ml\gamma^2/P & -l \\ \omega & 0 & M\gamma^2/P & 1 \\ \sin(\omega l) & \cos(\omega l) & 0 & 0 \\ \omega \cos(\omega l) & -\omega \sin(\omega l) & M\gamma^2/P & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{P}{Ml} \frac{1}{\cos(\omega l) - \sin(\omega l) / (\omega l)}}.$$

Критическое значение силы соответствует наименьшим значениям параметра $\omega = P/(El)$, при которых γ не существует. Это наименьший корень уравнения $\operatorname{tg}(\omega l) = \omega l$, приводящий к следующему значению критической силы: $P_* = 20,19EIl^2$, что совпадает с [1].

Описанный выше метод позволяет построить точное решение (3) задачи (1) – (2) и подтверждает основные классические результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б о л о т и н В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М., 1961, с. 16. 2. Г а л а з ю к В.А., Г о р е ч к о А.Н. Об одном методе решения динамических задач теории упругости в сферических и цилиндрических координатах. — ДАН УССР. Сер. А, 1980, № 6, с. 41–44.

УДК 534.13:539.374

В.В.ХАРИТОНОВ, д-р техн. наук,
Э.И.СТАРОВОЙТОВ, канд. физ.-мат. наук (БИИЖТ),
Т.А.СТАРОВОЙТОВА, канд. физ.-мат. наук,
В.С.ДИДКОВСКИЙ, канд. техн. наук,
А.И.ЮРОКИН, канд. физ.-мат. наук (КПИ)

О КОЛЕБАНИЯХ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОЙ ПЛАСТИНКИ

Поведение слоистых пластин, набранных из жестких металлических слоев и мягких полимерных заполнителей, при динамическом нагружении исследовано в основном численно [1]. Рассмотрены также [2], [3] колебания круглой двухслойной металлополимерной пластинки, модуль сдвига заполнителя которой мал относительно соответствующих констант упругости материала несущего слоя. В настоящей работе при подобных предположениях получено аналитическое решение задачи о колебаниях круглой трехслойной вязкоупругой пластинки, несимметричной по толщине (рис. 1).

Постановка краевой задачи. Геометрические гипотезы принимаются в соответствии с известной моделью трехслойных пластин Э.И.Григолюка [4]: для жестких несущих слоев — гипотезы Кирхгофа, для мягкого заполнителя — гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нор-

мали. Связь девиаторов напряжений и деформаций описывается соотношениями линейной теории вязкоупругости. Объемное деформирование упругое. Цилиндрическая система координат связана со срединной плоскостью заполнителя. Линейные перемещения и размеры пластинки отнесены к ее радиусу. Внешняя нагрузка, распределенная по поверхности пластинки, симметрична относительно начала координат: $q = q(r, t)$, где t — время.

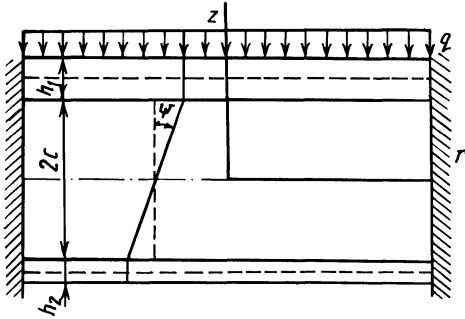


Рис. 1. Расчетная схема колебаний круглой трехслойной вязкоупругой пластинки

В соответствии с принятыми гипотезами прогиб во всех слоях одинаков $w = w(r, t)$. В качестве определяющих функций дополнительно введем радиальное перемещение координатной поверхности $u = u(r, t)$ и относительный сдвиг в полимерном слое $\psi = \psi(r, t)$, т.е. разность углов поворота нормалей несущих и полимерного слоев. Систему интегродифференциальных уравнений в перемещениях, описывающую движение трехслойной пластинки, можно получить вариационными методами по аналогии с [2], [3]:

$$\left. \begin{aligned} L_2 (a_1^* u + a_2^* \psi - a_3^* w_r) = 0; \quad L_2 (a_2^* u + a_4^* \psi - a_5^* w_r) - 2cG_3^* \psi = 0 \\ L_3 (a_3^* u + a_5^* \psi - a_6^* w_r) - M\ddot{w} = -q. \end{aligned} \right\} (1)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} a_1^* &= \sum_{k=1}^3 h_k (K_k + 4G_k^*/3), \quad a_2^* = c((K_1 + 4G_1^*/3)h_1 - (K_2 + 4G_2^*/3)h_2); \\ a_3^* &= h_1(c+h_1/2)(K_1 + 4G_1^*/3) - h_2(c+h_2/2)(K_2 + 4G_2^*/3); \\ a_4^* &= c^2(h_1(K_1 + 4G_1^*/3) + h_2(K_2 + 4G_2^*/3) + 2c(K_3 + 4G_3^*/3)/3); \\ a_5^* &= c(h_1(c+h_1/2)(K_1 + 4G_1^*/3) + h_2(c+h_2/2)(K_2 + 4G_2^*/3) + \\ &+ 2c^2(K_3 + 4G_3^*/3)/3); \\ a_6^* &= h_1(c^2 + ch_1 + h_1^2/3)(K_1 + 4G_1^*/3) + h_2(c^2 + ch_2 + h_2^2/3) \times \\ &\times (K_2 + 4G_2^*/3) + 2c^3(K_3 + 4G_3^*/3)/3; \end{aligned} \right\} (2)$$

C_k^* — интегральный оператор линейной вязкоупругости: $G_k^* f(t) \equiv G_k(f(t)) - \int_0^t R_k(t-\tau) f(\tau) d\tau \equiv G_k(1-R_k^*) f(t)$; k — номер слоя; $R_k(t)$ — ядро сдвиговой релаксации; G_k, K_k — модули сдвига и объемный; L_2, L_3 — линейные дифференциальные операторы: $L_2(f(r)) \equiv (\frac{1}{r}(rf(r))_{,r})_{,r}$; $L_3(f(r)) \equiv (rL_2 \times (f(r))_{,r})_{,r}$; запятая в нижнем индексе обозначает частное дифференцирование по следующей за ней координате; $M = \sum_{k=1}^3 h_k \rho_k a^2$; ρ_k — плотность материала k -го слоя; a — радиус пластинки.

На краю пластинки в случае ее жесткой заделки при $r = 1$ должны выполняться условия

$$u = \psi = w_{,a} = w_{,r} = 0. \quad (3)$$

Если опирание шарнирное, то

$$u = \psi = w = M_{,r} = 0, \quad (4)$$

где M_r — обобщенный момент [4].

Свободные упругие колебания. Соответствующая система уравнений следует из системы (1), если положить $q = 0$ и опустить звездочки у операторов a_i^* : $a_i \rightarrow a_i^*$, причем константы a_i вычисляются по формулам (2), если в последних также отбросить звездочки. Получить общее решение такой системы уравнений не удалось, и исследование ограничилось классом пластин, для которых выполняется условие: $G_3 \ll G_k, K_r, K_3$ ($k = 1, 2$). Это позволяет пренебречь последним членом второго уравнения и выписать аналитическое решение задачи в виде:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(r) T_n(t); \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r) T_n(t); \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r) T_n(t); \\ T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t). \quad (5)$$

Системы обобщенных функций χ_n, φ_n, v_n в случае граничных условий (3), (4) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} v_n &= (I_0(\beta_n r) - I_0(\beta_n) I_0(\beta_n r) / I_0(\beta_n)) / d_n; \\ \varphi_n &= \frac{(a_1 a_5 - a_2 a_3) \beta_n}{a_1 a_4 - a_2^2} (I_1(\beta_n) r - I_1(\beta_n r) + I_0(\beta_n) (I_1(\beta_n) r - \\ &- I_1(\beta_n r)) / I_0(\beta_n)); \\ \chi_n &= \frac{1}{a_1} (a_3 v_{n,r} - a_2 \varphi_n + C_{1n} r), \end{aligned} \right\} (6)$$

где J_n, I_n – известные функции Бесселя порядка n ; d_n – нормирующий коэффициент [2]; β_n – некоторые собственные числа, определяющие частоты ω_n собственных колебаний упругой трехслойной пластинки:

$$\omega_n^2 = (a_1 a_4 - a_2^2) (a_1 a_6 - a_3^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2 \beta_n^4 / Ma_1 (a_1 a_4 - a_2^2). \quad (7)$$

Трансцендентные уравнения для определения β_n следуют из граничных условий, например из формулы (3) получаем уравнение, которое совпадает с аналогичным для однослойной пластинки: $I_1(\beta_n) I_0(\beta_n) + I_0(\beta_n) I_1(\beta_n) = 0$. Константу интегрирования C_{1n} в случае граничных условий (3), (4) следует положить равной нулю.

Вынужденные колебания вязкоупругой пластинки. В дальнейшем предполагается подобие ядер релаксации материалов слоев и пропорциональность $R_3(t)$ некоторому малому параметру. Нагрузка $q(r, t)$ считается малой и представляется в виде разложения в ряд по системе функций v_n (6):

$$q(r, t) = \epsilon_1 M \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t). \quad (8)$$

Операторы вязкоупругости a_m^* , входящие в систему (1), представим в виде:

$$a_m^* = a_m - a_m' R_3^* \quad (m = 1, 2, \dots, 6); \quad (9)$$

$$a_1' = 4 \sum_{k=1}^3 h_k b_k G_k / 3; \quad a_2' = 4c (h_1 b_1 G_1 - h_2 b_2 G_2) / 3, \quad (b_3 = 1);$$

$$a_3' = 4 (h_1 (c + h_1/2) b_1 G_1 - h_2 (c + h_2/2) b_2 G_2) / 3;$$

$$a_4' = 4c^2 (h_1 b_1 G_1 + h_2 b_2 G_2 + 2c G_3 / 3) / 3;$$

$$a_5' = 4c (h_1 (c + h_1/2) b_1 G_1 + h_2 (c + h_2/2) b_2 G_2 + 2c^2 G_3 / 3) / 3;$$

$$a_6' = 4 (h_1 (c^2 + ch_1 + h_1^2/3) b_1 G_1 + h_2 (c^2 + ch_2 + h_2^2/3) b_2 G_2 + 2c^3 G_3 / 3) / 3.$$

Подстановка выражений (5), (8), (9) в третье уравнение системы (1) приводит к следующему уравнению относительно функции $T_n(t)$:

$$\left. \begin{aligned} L_3 (a_3 \chi_n + a_5 \varphi_n - a_6 v_{n,r}) T_n - M v_n \ddot{T}_n &= -\epsilon_1 M v_n q_n + \\ + L_3 (a_3' \chi_n + a_5' \varphi_n - a_6' v_{n,r}) R_3^* T_n; \\ R_3^* T_n &\equiv \int_0^t R_3(t-\tau) T_n(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Так как функции χ_n, φ_n, v_n получены при исследовании свободных колебаний упругой трехслойной пластинки, то

$$L_3 (a_3 \chi_n + a_5 \varphi_n - a_6 v_{n,r}) \equiv -M \omega_n^2 v_n. \quad (11)$$

Если во всех уравнениях системы (1) заменить константы $a'_m \rightarrow a_m$ ($m = 1, 2, \dots, 6$), то мы придем по аналогии к результату вида (11):

$$L_3 (a'_3 \chi_n + a'_5 \varphi_n - a'_6 v_{n,r}) = -M \omega_n^{12} v_n, \quad (12)$$

где ω'_n определяются по формуле (7), если в последней произвести замену $a'_m \rightarrow a_m$, $\beta'_n \rightarrow \beta_n$. Константы β'_n можно рассматривать как обобщенные собственные числа типа β_n , совпадающие с β_n в случае заделки края пластины. При других граничных условиях они определяются из трансцендентных уравнений, получаемых заменой $a'_m \rightarrow a_m$ из аналитических уравнений для β_n . Решение уравнения типа (10) исследовано с учетом (11), (12) в [3] методом усреднения для динамических задач вязкоупругости [5]. Применительно к нашему случаю имеем:

$$T_n = (A_n \cos \omega_n (1+R_{cn}/2)t + B_n \sin \omega_n (1+R_{cn}/2)t) \exp(-\omega_n R_{sn} t/2) + 2\sqrt{(q_{1n}^2 + q_{2n}^2) / (R_{sn}^2 + R_{cn}^2)} \cos(\omega_n t + \varphi_{01} - \varphi_{02}) / \omega_n. \quad (13)$$

Здесь R_{cn}, R_{sn} — два основных Фурье-образа ядра $R_3(t)$:

$$R_{cn} = c_n \int_0^{\infty} R_3(\tau) \cos(\omega_n \tau) d\tau, \quad R_{sn} = c_n \int_0^{\infty} R_3(\tau) \sin(\omega_n \tau) d\tau,$$

$$c_n = \omega_n^{12} / \omega_n^2;$$

$$q_{1n} = \frac{1}{\omega_n} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q_n(t) \sin(\omega_n t) dt;$$

$$q_{2n} = \frac{1}{\omega_n} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q_n(t) \cos(\omega_n t) dt;$$

$$\varphi_1 = \arctg(R_{sn}/R_{cn}); \quad \varphi_2 = \arctg(q_{1n}/q_{2n}).$$

Константы A_n, B_n определяются из начальных условий движения:

$$A_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^1 w(r, 0) v_n r dr - 2\sqrt{(q_{1n}^2 + q_{2n}^2) / (R_{cn}^2 + R_{sn}^2)} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) / \omega_n,$$

$$B_n = R_{sn} A_n / 2 (1+R_{cn}/2) + (2\sqrt{(q_{1n}^2 + q_{2n}^2) / (R_{cn}^2 + R_{sn}^2)}) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^1 \dot{w}(r, 0) v_n r dr / \omega_n (1+R_{cn}/2).$$

Таким образом, перемещения при осесимметричных колебаниях трехслойной круглой металлополимерной пластинки описываются аналитическими соотношениями (5) с учетом функций (6), (13).

Численное исследование решения проведено на ЭВМ ЕС-1022. Декремент затухания колебаний, определяемый параметром R_{sn} , в зависимости от толщины полимерного слоя приведен на рис. 2.

На рис. 3 приведены графики изменения частот основного тона (7), соответствующих $\beta_0^2 = 10,21$ и $\beta_1^2 = 88,90$, также в зависимости от толщины слоя заполнителя.

В качестве материалов несущих слоев принимался алюминиевый сплав Д16Т, заполнитель — политетрафторэтилен. Соответствующие параметры упругости и ядер релаксации приведены в [6].

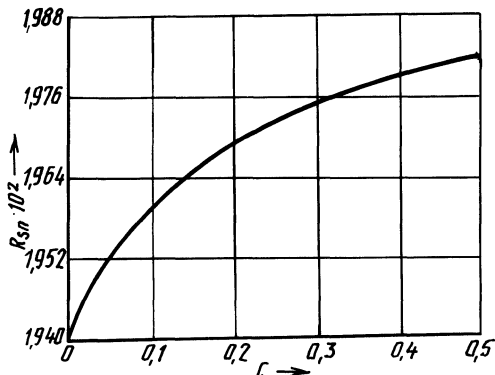


Рис. 2. Логарифмический декремент колебаний R_{sp} в зависимости от толщины заполнителя c при $h_1 = h_2 = 0,05$

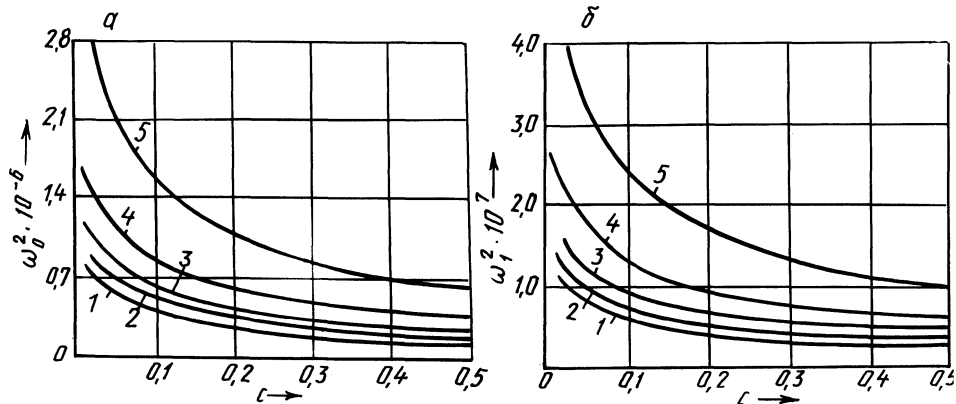


Рис. 3. Частота колебаний основного тона ω_0 (а) и ω_1 (б) в зависимости от толщины заполнителя c :

1 — $h_1 = h_2 = 0,05$; 2 — $h_1 = 0,06$; $h_2 = 0,04$; 3 — $h_1 = 0,07$; $h_2 = 0,03$; 4 — $h_1 = 0,08$; $h_2 = 0,02$; 5 — $h_1 = 0,1$; $h_2 = 0$

Анализируя численные результаты, можно сделать вывод о росте частот колебаний пластинки с увеличением ее асимметрии. При росте толщины слоя заполнителя частоты убывают, а логарифмический декремент колебаний нелинейно возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Кассихин В.Н. Малые поперечные колебания слоистых круговых пластин. — Проблемы прочности, 1982, № 10, с. 65–68.
2. Дидковский В.С., Старовойтов Э.И., Старовойтова Т.А. О колебаниях упругой двухслойной пластинки. — Проблемы прочности, 1984, № 6, с. 28–31.
3. Дидковский В.С., Старовойтов Э.И., Старовойтова Т.А. Колебания круглой двухслойной металлополимерной пластинки. — Проблемы прочности, 1983, № 10, с. 85–88.
4. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. — М., 1973. — 170 с.
5. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. — М., 1970. — 280 с.
6. Старовойтов Э.И., Старовойтова Т.А. К изгибу двухслойных металлополимерных пластин. — Проблемы прочности, 1984, № 3, с. 100–104.

УДК 539.6

А.А.КИМ, канд. техн. наук (БИМСХ),
О.Н.СКЛЯР (БПИ)

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ, КРУТИЛЬНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Вариационный подход к выводу уравнений движения твердых тел с наследственностью связан с минимизацией функционалов, содержащих искомые величины, производные и интегралы от них. Для таких функционалов необходимо устанавливать условие экстремума по схеме, аналогичной выводу классического уравнения Эйлера. Такая схема ранее была реализована для пространственной вязкоупругой среды в работе [1]. Ниже дается вывод уравнений продольных, крутильных и изгибных колебаний однородных стержней постоянного поперечного сечения с учетом релаксационных эффектов.

Удельная энергия деформации стержня в случае действия в каждом сечении продольной силы T , изгибающего момента M и крутящего момента H [2]:

$$U = 1/2 (T\epsilon + Mk + H\omega), \quad (1)$$

где ϵ — относительная деформация в продольном направлении; k — кривизна изогнутой оси стержня; φ — угол закручивания:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1; \\ \epsilon &\approx \frac{\partial u}{\partial x}; \\ k &= \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} / \left(1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$