$$(1+3\kappa)\ \theta(x) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_D v_i(\eta)\Delta_\eta q(x,\eta)\,d_\eta D +$$

$$+\frac{\kappa}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\int_D x_i\ R(\eta)\ \frac{\partial}{\partial x_i}F(x,\eta)\,d_\eta D - \frac{1}{4\pi}\int_D\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}F(x,\eta)\,d_\eta D -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_D\sum_{i=1}^{3}X_i\frac{\partial}{\partial x_i}F(x,\eta)\,d_\eta D + \frac{\kappa}{4\pi}\int_S\theta(\xi)\ r\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial n_\xi}F(x,\xi)\,d_\xi S +$$

$$+\frac{\kappa}{4\pi}\int_D\theta(\eta)\ r\frac{\partial}{\partial r}\Delta_\eta q(x,\eta)\,d_\eta D, \qquad (3)$$

где $q(x,\eta) = (r^2+4\omega(x)\,\omega(\eta))^{1/2}$; $F(x,\eta) = \frac{1}{r} - q(x,\eta)$ — квазифункция Грина; $\omega(x) = 0$ — нормализованное до первого порядка уравнение границы S.

Исследование ядер вида $\Delta_\eta q(x,\eta)$ и $r\frac{\partial}{\partial r}\Delta_\eta q(x,\eta)$ уравнений (2) и (3) показало, что $\omega(x)$ необходимо строить в виде, предложенном в [1]. А именно:

$$\omega = \omega_0 + \omega_0^2 X + \omega_0^3\psi,$$

где ω_0 — какая-нибудь нормализованная функция для D: $X = 1/8\cdot(2\Delta\omega_0 - 3\Phi_0)$; $\psi = 1/3\cdot(2X\Delta\omega_0 - 6X^2 - 4X\Phi_0 - (\nabla\omega_0, \nabla X))$; $\Phi_0 = \omega_0^{-1}((\check{\nabla}\omega_0)^2 - 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р в а ч е в В.Л., П р о ц е н к о В.С. Метод квазифункций Грина. — В кн.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск, 1979, с. 188–196.
2. Р в а ч е в В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — Киев, 1982. — 551 с.
3. Т р е ф ф ц Е. Математическая теория упругости. — М., 1932, 239 с.

УДК 534.011

Н.А.ДОКУКОВА (Индмаш АН БССР)

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ, СЖАТОГО "СЛЕДЯЩЕЙ" СИЛОЙ

Исследуется метод интегрального преобразования Лагерра на примере задачи об устойчивости стержня, сжатого "следящей силой". Рассматриваются малые колебания стержня около положения равновесия [1]. Уравнение таких движений, согласно [1], имеет вид:

$$EI\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = P(f-v) - P\varphi(l-z) - M\,\frac{d^2 f}{dt^2}(l-z), \qquad (1)$$

где $v(z,t)$ — прогиб оси стержня; $f(t) = v(l,t)$; $\varphi(t) = \frac{\partial v(l,t)}{\partial z}$) при граничных условиях

$$v(0,t) = 0, v'(0,t) = 0. \qquad (2)$$

Неклассичность уравнения движения, описывающего подобные колебания, состоит в том, что оно содержит в себе искомое решение и его производную в фиксированной точке (на конце стержня).

Для решения задачи (1) – (2) воспользуемся модификацией метода полиномов Лагерра [2], для чего искомое решение представим в виде бесконечного ряда:

$$v(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z) L_n(\gamma t), \tag{3}$$

где γ – произвольная постоянная, вводимая с целью улучшения сходимости ряда (3). Уравнение (1) после некоторых преобразований приведет к следующему уравнению для определения $v_n(z)$:

$$EIv_n''(z) + \rho v_n(z) = P(v_n(l) - v_n'(l)(l-z)) - M(l-z) \times$$

$$\times (\gamma^2 \sum_{k=0}^{n} (n+1-k) v_k(l) - \frac{\partial v(l,0)}{\partial t} - \gamma(n+1) v(l,0)). \tag{4}$$

Решение уравнения (4) получается обычным способом посредством фундаментального решения $g(z,\xi)$:

$$v_n(z) = C_{1n}\sin(\omega z) + C_{2n}\cos(\omega z) + \omega^2 \int_0^l g(z,\xi)(v_n(l) -$$

$$- v_n'(l)(l-\xi))d\xi - \frac{\omega^2 M}{P} \int_0^l g(z,\xi)(l-\xi)(\gamma^2 \sum_{k=0}^{n} (n+1-k) v_n(l) -$$

$$- \frac{\partial v(l,0)}{\partial t} - \gamma(n+1) v(l,0))d\xi, \tag{5}$$

где

$$g(z,\xi) = \mathrm{sign}(z-\xi)(\sin\omega(z-\xi))/(2\omega).$$

Точное решение (5) задачи (1) – (2) требует нахождения неизвестных значений $v_n(l)$ и $v_n'(l)$. Для этого в уравнениях (5) и $v_n'(z)$ положим $z = l$. В этом случае относительно $v_n(l)$ и $v_n'(l)$ получается система двух алгебраических уравнений, из которой следует:

$$v_n(l) = \frac{A}{\Delta}(V_{n-1}(l)(\frac{1}{\omega}\sin(\omega l) + l\cos(\omega l) + C_{1n}\sin(\omega l) +$$

$$+ C_{2n}\cos(\omega l)) + \frac{C}{\Delta}(V_{n-1}(l)(1+\cos(\omega l) - \omega l\sin(\omega l)) +$$

$$+ \omega(C_{1n}\cos(\omega l) - C_{2n}\sin(\omega l))); \tag{6}$$

$$v_n'(l) = \frac{D}{\Delta}(V_{n-1}(l)(\frac{1}{\omega}\sin(\omega l) + l\cos(\omega l)) + C_{1n}\sin(\omega l) +$$

$$+ C_{2n}\cos(\omega l) + \frac{B}{\Delta}(V_{n-1}(l)(1+\cos(\omega l) - \omega l\sin(\omega l)) +$$

$$+ \omega(C_{1n}\cos(\omega l) - C_{2n}\sin(\omega l))), \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&A = 1/2\cdot(1-\cos(\omega l) + \omega l\sin(\omega l));\\
&B = 1/2\cdot(1-\cos(\omega l) - M\gamma^2(\sin(\omega l) + \omega l\cos(\omega l))/(2P\omega));\\
&C = 1/(2\omega)(\sin(\omega l) + \omega l\cos(\omega l));\\
&D = 1/2\cdot(M\gamma^2/(2P)(1+\cos(\omega l) - \omega l\sin(\omega l)) - \omega\sin(\omega l)),\\
&\Delta = AB - CD;\quad V_{n-1}(l) = \frac{M}{2P}(\gamma^2\sum_{k=0}^{n-1}(n+1-k)v_k(l) -\\
&- \frac{\partial v(l,0)}{\partial t} - \gamma(n+1)v(l,0)).
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Общее решение (4) после интегрирования с учетом формул (6) – (8) примет вид:

$$v_n(z) = C_{1n}\sin(\omega z) + C_{2n}\cos(\omega z) - \frac{v_n(l)}{2}(\cos(\omega(z-l)) - 2 +$$

$$+ \cos(\omega z)) - \frac{v_n'(l)}{2}(\frac{1}{\omega}(\sin(\omega(z-l)) - \sin(\omega z)) - l\cos(\omega z) -$$

$$- 2(z-l)) - \frac{M}{2P}(\gamma^2\sum_{k=0}^{n}(n+1-k)v_k(l) - \frac{\partial v(l,0)}{\partial t} - \gamma(n+1)\times$$

$$\times v(l,0))(\frac{1}{\omega}(\sin(\omega(z-l) - \sin(\omega z) - l\cos(\omega z) - 2(z-l)).$$

Произвольные постоянные C_{1n}, C_{2n} должны быть определены из начальных условий задачи (т.е. по заданной начальной форме стержня и начальной скорости его точек).

Собственные колебания стержня определяются теми значениями параметра γ, при которых нарушается единственность решения задачи (1) – (2). Это имеет место в случае, когда определитель матрицы, составленной при граничных условиях $v_n(0) = 0$, $v_n'(0) = 0$, $v_n(l) = f_n$, $v_n'(l) = \varphi_n$, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-Ml\gamma^2/P & -l \\ \omega & 0 & M\gamma^2/P & 1 \\ \sin(\omega l) & \cos(\omega l) & 0 & 0 \\ \omega\cos(\omega l) & -\omega\sin(\omega l) & M\gamma^2/P & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{P}{Ml}\ \frac{1}{\cos(\omega l) - \sin(\omega l)/(\omega l)}}\ .$$

Критическое значение силы соответствует наименьшим значениям параметра $\omega = P/(EI)$, при которых γ не существует. Это наименьший корень уравнения $\operatorname{tg}(\omega l) = \omega l$, приводящий к следующему значению критической силы: $P_* = 20{,}19EI/l^2$, что совпадает с [1].

Описанный выше метод позволяет построить точное решение (3) задачи (1) – (2) и подтверждает основные классические результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М., 1961, с. 16. 2. Галазюк В.А., Горечко А.Н. Об одном методе решения динамических задач теории упругости в сферических и цилиндрических координатах. – ДАН УССР. Сер. А, 1980, № 6, с. 41–44.

УДК 534.13:539.374

В.В.ХАРИТОНОВ, д-р техн. наук,
Э.И.СТАРОВОЙТОВ, канд. физ.-мат. наук (БИИЖТ),
Т.А.СТАРОВОЙТОВА, канд. физ.-мат. наук,
В.С.ДИДКОВСКИЙ, канд. техн. наук,
А.И.ЮРОКИН, канд. физ.-мат. наук (КПИ)

О КОЛЕБАНИЯХ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОЙ ПЛАСТИНКИ

Поведение слоистых пластин, набранных из жестких металлических слоев и мягких полимерных заполнителей, при динамическом нагружении исследовано в основном численно [1]. Рассмотрены также [2], [3] колебания круглой двухслойной металлополимерной пластинки, модуль сдвига заполнителя которой мал относительно соответствующих констант упругости материала несущего слоя. В настоящей работе при подобных предположениях получено аналитическое решение задачи о колебаниях круглой трехслойной вязкоупругой пластинки, несимметричной по толщине (рис. 1).

Постановка краевой задачи. Геометрические гипотезы принимаются в соответствии с известной моделью трехслойных пластин Э.И.Григолюка [4]: для жестких несущих слоев – гипотезы Кирхгофа, для мягкого заполнителя – гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нор-