Указанные формулы играют существенную роль при численной реализации метода граничных интегральных уравнений в задачах о деформировании упругой полуплоскости силами, приложенными к границе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. — М., 1974. — 456 с. 2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. — М., 1955. — 369 с. 3. Мусхешвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М., 1966. — 707 с. 4. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А. Расчет конструкций на упругом основании. — М., 1984. — 679 с.

УДК 539.3

М.А.ЖУРАВКОВ (БГУ)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

Построение функций Грина даже для двумерной задачи весьма сложно, и можно назвать лишь немногие случаи, в которых эта проблема конструктивно решена. Возможен другой путь — построение функций, аналогичных в некотором смысле функциям Грина. В этом случае решение задачи уже не получается в замкнутом виде, а представляется через некоторую вспомогательную функцию, являющуюся решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Такой подход впервые был применен Е.Е.Леви. Позже этот метод был развит с более общих позиций М.Жевре. Однако те средства, которыми пользуются Жевре и ряд других авторов, не эффективны на практике. В частности, большие трудности применения этих методов связаны с тем обстоятельством, что ядра интегральных уравнений выражаются через функции, построенные с помощью особых интегралов.

В 1979 г. академик В.Л.Рвачев и профессор В.С.Проценко в работе [1] предложили метод построения квазифункций Грина, опирающийся на использование теории R-функций [2], для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ и основных типов краевых условий. При этом квазифункцией Грина они называют функцию двух переменных, обращающуюся в нуль на границе и имеющую точечную особенность внутри области. Существенно при этом то, что все построения проводятся в рамках элементарных функций для областей D, определяемых неравенствами вида $\omega \geqslant 0$ ($\omega = 0$ — уравнение границы S области D), где ω — элементарная функция. Ввиду алгоритмической полноты [2] множества элементарных функций уравнение $\omega = 0$ может быть построено для области, граница которой состоит из конечного числа кусков элементарных линий или поверхностей.

Целью настоящей работы является применение метода квазифункций Грина к решению первой основной задачи теории упругости. С помощью этого метода выведена система четырех интегральных уравнений, ядра которых выражаются явно через нормализованное до первого порядка уравнение границы. Сведение задачи к аналогичной с нулевыми краевыми условиями позволило избавиться от дифференцирования интегралов с полярной особенностью. В точной постановке необходимо решать систему пяти интегральных уравнений для определения вектора перемещения внутри области и объемного расширения как внутри, так и на границе области. При численной реализации можно ограничиться решением системы трех интегральных уравнений для определения вектора перемещения внутри области, заменив объемное расширение его явным представлением.

Уравнения Ляме при наличии объемных сил имеют следующий вид:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = -X_i^0,$$

где

$$\theta = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad X_i^0 = X_i^0/\mu.$$

Пусть на границе S рассматриваемой области заданы компоненты вектора перемещения $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$: $u_i|_S = \varphi_i^0$. Заменив $v_i = u_i - \varphi_i$, где φ_i —продолжение φ_i^0 внутри D[2], придем к задаче с однородным граничным условием:

$$\Delta v_i + 2\kappa\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = X_i^1; \tag{1}$$

$$v_i|_S = 0,$$

где

$$\theta = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}; \quad \kappa = 1/2\,(1-2\nu);$$

$$X_i^1 = -X_i^0 - \Delta\varphi - 2\kappa\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i x_j}.$$

Уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta(v_i + \kappa x_i\theta) = X_i,$$

где $X_i = X_i^1 + \kappa x R$; $R = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial X_i^1}{\partial x_i}\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}$.

Проведем преобразования по схеме, предложенной в [1], [3]. В результате получим следующую систему интегральных уравнений для определения $v_i(x)$ внутри области D:

$$v_i(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_D v_i(\eta)\,\Delta_\eta q(x,\eta)\,d_\eta D + \frac{\kappa}{4\pi}\int_D x_i\,R(\eta)\,F(x,\eta)\,d_\eta D -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_D X_i\,F(x,\eta)\,d_\eta D - \frac{\kappa}{4\pi}\int_S \theta(\xi)\,(\xi_i - x_i)\,\frac{\partial}{\partial n_\xi}F(x,\xi)\,d_\xi S -$$

$$-\frac{\kappa}{4\pi}\int_D \theta(\eta)\,(\eta_i - x_i)\,\Delta_\eta q(x,\eta)\,d_\eta D; \tag{2}$$

$$(1+3\kappa)\ \theta(x) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_D v_i(\eta)\Delta_\eta q(x,\eta)\,d_\eta D +$$

$$+\frac{\kappa}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\int_D x_i\ R(\eta)\ \frac{\partial}{\partial x_i}F(x,\eta)\,d_\eta D - \frac{1}{4\pi}\int_D\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}F(x,\eta)\,d_\eta D -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_D\sum_{i=1}^{3}X_i\frac{\partial}{\partial x_i}F(x,\eta)\,d_\eta D + \frac{\kappa}{4\pi}\int_S\theta(\xi)\ r\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial n_\xi}F(x,\xi)\,d_\xi S +$$

$$+\frac{\kappa}{4\pi}\int_D\theta(\eta)\ r\frac{\partial}{\partial r}\Delta_\eta q(x,\eta)\,d_\eta D, \tag{3}$$

где $q(x,\eta) = (r^2+4\omega(x)\,\omega(\eta))^{1/2}$; $F(x,\eta) = \frac{1}{r} - q(x,\eta)$ — квазифункция Грина; $\omega(x) = 0$ — нормализованное до первого порядка уравнение границы S.

Исследование ядер вида $\Delta_\eta q(x,\eta)$ и $r\frac{\partial}{\partial r}\Delta_\eta q(x,\eta)$ уравнений (2) и (3) показало, что $\omega(x)$ необходимо строить в виде, предложенном в [1]. А именно:

$$\omega = \omega_0 + \omega_0^2 X + \omega_0^3\psi,$$

где ω_0 — какая-нибудь нормализованная функция для D: $X = 1/8\cdot(2\Delta\omega_0 - 3\Phi_0)$; $\psi = 1/3\cdot(2X\Delta\omega_0 - 6X^2 - 4X\Phi_0 - (\nabla\omega_0,\nabla X))$; $\Phi_0 = \omega_0^{-1}((\check{\nabla}\omega_0)^2 - 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.Л., Проценко В.С. Метод квазифункций Грина. — В кн.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск, 1979, с. 188—196.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. — Киев, 1982. — 551 с.
3. Треффц Е. Математическая теория упругости. — М., 1932, 239 с.

УДК 534.011

Н.А.ДОКУКОВА (Индмаш АН БССР)

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ, СЖАТОГО "СЛЕДЯЩЕЙ" СИЛОЙ

Исследуется метод интегрального преобразования Лагерра на примере задачи об устойчивости стержня, сжатого "следящей силой". Рассматриваются малые колебания стержня около положения равновесия [1]. Уравнение таких движений, согласно [1], имеет вид:

$$EI\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = P(f-v) - P\varphi(l-z) - M\,\frac{d^2 f}{dt^2}\,(l-z), \tag{1}$$

где $v(z,t)$ — прогиб оси стержня; $f(t) = v(l,t)$; $\varphi(t) = \frac{\partial v(l,t)}{\partial z}$) при граничных условиях

$$v(0,t) = 0, v'(0,t) = 0. \tag{2}$$