

ПОЛЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ВЫЗВАННЫХ ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Рассматривается задача об отыскании поля перемещений в упругой полуплоскости $x_2 \geq 0$, вызванных действием единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке $P(\xi_1, \xi_2)$. Предполагается, что граница полуплоскости $x_2 = 0$ свободна от напряжений.

Задача сводится к решению системы уравнений Ляме

$$\Delta G_{ij} + k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial G_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{i2}}{\partial x_2} \right) = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \delta_{ij} \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial G_{i1}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{i2}}{\partial x_1} \right) |_{x_2=0} &= 0, \\ \left((k-1) \frac{\partial G_{i1}}{\partial x_1} + (k+1) \frac{\partial G_{i2}}{\partial x_2} \right) |_{x_2=0} &= 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь Δ — двумерный оператор Лапласа; δ_{ij} — символ Кронекера; $\delta(x)$ — дельта-функция, $k = 1/(1-2\nu)$.

Принципы решения этой задачи известны достаточно хорошо [1]–[3], однако нет явных выражений поля перемещений в упругой полуплоскости.

Настоящая работа восполняет указанный пробел.

Следуя [1], представим G_{ij} в виде:

$$\begin{aligned} G_{1j}(x_1 - \xi_1, x_2, \xi_2) &= G'_{1j}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) + G'_{1j}(x_1 - \xi_1, x_2 + \xi_2) + \\ &+ U_{1j}; \\ G_{2j}(x_1 - \xi_1, x_2, \xi_2) &= G'_{2j}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) + G'_{2j}(x_1 - \xi_1, x_2 + \xi_2) + \\ &+ U_{2j}; \end{aligned} \quad (3)$$

где U_{ij} — корректирующий тензор, G'_{ij} — тензор Грина для упругой плоскости, который имеет следующий вид [1]–[3]:

$$\left. \begin{aligned}
 G'_{ii} (x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) &= -\frac{1}{4\pi(k+1)} \left((k+2) \ln R_1 - K(x_i - \xi_i) \times \right. \\
 &\times \left. \frac{\partial \ln R_1}{\partial x_i} \right); \\
 G'_{12} (x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) &= G'_{21} (x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \frac{x_1 - \xi_1}{4\pi(k+1)} k \frac{\partial \ln R_1}{\partial x_2} = \\
 &= \frac{x_2 - \xi_2}{4\pi(k+1)} k \frac{\partial \ln R_1}{\partial x_1}; \\
 R_1^2 &= (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2.
 \end{aligned} \right\} (4)$$

Компоненты тензора U_{ij} определяются из решения системы (1) при граничных условиях [1]:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\partial U_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial U_{12}}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial U_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial U_{22}}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=0} = 0; \\
 &\left((k+1) \frac{\partial U_{12}}{\partial x_2} + (k-1) \frac{\partial U_{11}}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=0} = \frac{k-1}{k+2} \frac{x_1 - \xi_1}{\pi R^2} + \\
 &+ \frac{k(x_1 - \xi_1)}{\pi(k+1)} \frac{\partial^2 \ln R}{\partial x_1^2}; \\
 &\left((k-1) \frac{\partial U_{21}}{\partial x_1} + (k+1) \frac{\partial U_{22}}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} = -\frac{\xi_2}{\pi R^2} + \frac{k\xi_2}{\pi(k+1)R^2} \left(1 - \frac{2\xi_2^2}{R^2} \right); \\
 &R^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + \xi_2^2.
 \end{aligned}$$

U_{ij} ищем в виде, предложенном в [2]:

$$\left. \begin{aligned}
 U_{i1} &= \frac{1}{2\pi(1+k)} \left(x_2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} + \frac{1}{k} \Phi_i \right); \\
 U_{i2} &= \frac{1}{2\pi(1+k)} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} + \frac{1}{k} \Phi_i \right) - \frac{1}{\pi k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2}.
 \end{aligned} \right\} (5)$$

Здесь Φ_i — гармонические функции, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} &= \frac{x_1 - \xi_1}{R^2} - 2k(x_1 - \xi_1) \frac{\xi_1^2}{R^4}; \\ \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} &= \frac{\xi_2}{R^2} + \frac{2k\xi_2^3}{R^4}. \end{aligned} \right\} (6)$$

Следуя [1], находим, что

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Psi_2 - k\xi_2 \operatorname{arctg} \frac{x_1 - \xi_1}{x_2 + \xi_2}; \\ \Phi_2 &= (k+1)\Psi_1 - k\xi_2 \ln R_2; \end{aligned} \right\} (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_2^2 &= (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2; \\ \Psi_1 &= (x_2 + \xi_2) \ln R_2 - (x_2 + \xi_2) + (x_1 - \xi_1) \operatorname{arctg} \frac{x_2 + \xi_2}{x_1 - \xi_1}; \\ \Psi_2 &= -(x_1 - \xi_1) \ln R_2 + (x_1 - \xi_1) - (x_2 + \xi_2) \operatorname{arctg} \frac{x_1 - \xi_1}{x_2 + \xi_2}. \end{aligned} \right\} (8)$$

Выполнение граничных условий (7) легко проверить, дифференцируя Φ_i по x_2 и полагая $x_2 = 0$.

Используя формулы (8), (7), (5), (4), (3), можем записать выражение для компонент тензора Грина:

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{2\pi(k+1)} \left(-\frac{k+2}{2} (\ln R_1 + \ln R_2) + \frac{k(x_1 - \xi_1)^2}{2} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + \right. \\ &+ k\xi_2 x_2 \frac{(x_1 - \xi_1)}{R_2^2} - \frac{k+1}{k} (x_2 + \xi_2) \operatorname{arctg} \frac{x_1 - \xi_1}{x_2 + \xi_2} - \frac{1}{k} (x_1 - \xi_1) \times \\ &\times \ln R_2 + \frac{1}{k} (x_1 - \xi_1) \Big); \\ G_{22} &= \frac{1}{2\pi(k+1)} \left(-\frac{k+2}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{k}{2} \left(\frac{x_2 - \xi_2}{R_1^2} - \frac{x_1^2 - \xi_2^2}{R_2^2} \right) + \right. \\ &+ \frac{(k+1)(x_2 + \xi_2)^2}{R_2^2} - \frac{k\xi_2 x_2 ((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2)}{R_2^4} \\ &- (k+1)^2 \ln R_2 \Big); \\ G_{12} &= \frac{1}{2\pi(k+1)} \left(\frac{k(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{2R_1^2} + \frac{k(x_1 - \xi_1)(x_2 + \xi_2)}{2R_2^2} \right) + \end{aligned} \right\} :$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{x_1 - \xi_1}{R_2^2} (x_2 + (k+1)\xi_2) - \frac{2kx_2\xi_2(x_1 - \xi_1)(x_2 + \xi_2)}{R_2^4} + \dots \\
 & + \frac{k+1}{k} \operatorname{arctg} \frac{x_1 - \xi_1}{x_2 + \xi_2} \Big); \\
 G_{21} = & \frac{1}{2\pi(k+1)} \left(\frac{k(x_1 - \xi_1)(x_2 + \xi_2)}{2R_1^2} - \frac{k(x_1 - \xi_1)(x_2 + \xi_2)}{2R_2^2} \right) + \\
 & + \left(\frac{x_2(k+1)^2}{k} + \frac{\xi_2}{k} \right) \ln R_2 - \frac{kx_2\xi_2(x_2 + \xi_2)}{R_2^2} - \frac{k+1}{k} (x_2 + \\
 & + \xi_2) + \frac{(x_1 - \xi_1)(k+1)}{k} \operatorname{arctg} \frac{x_2 + \xi_2}{x_1 - \xi_1} \Big).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Для случая, когда на границе полуплоскости заданы нулевые перемещения, необходимо решить уравнение (1) при граничных условиях $G_{ij}|_{x_2=0} = 0$.

Следуя указанной в [1] методике построения G_{ij} с использованием корректирующего тензора, можем записать выражение для компонент G_{ij} в явном виде¹:

$$\begin{aligned}
 G_{11} = & \frac{1}{2\pi(k+1)} \left(\frac{1}{2} (k+2) \ln \frac{R_2}{R_1} + 2k(x_1 - \xi_1)^2 \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \right) + \\
 & + \frac{k^2\xi_2x_2}{k+2} \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 + \xi_2)^2}{R_2^4} \Big); \\
 G_{12} = & \frac{k(x_1 - \xi_1)}{2\pi(k+1)} \left(\frac{x_2 - \xi_2}{R_1^2} - \frac{x_2 + \xi_2}{R_2^2} + \frac{k\xi_2}{(k+2)R_2^2} \left(\frac{2x_2(x_2 + \xi_2)}{R_2^2} \right) \right) + \\
 & + \frac{k+2}{k} \Big); \\
 G_{21} = & \frac{x_1 - \xi_1}{2\pi(k+1)} \left(\frac{k(x_2 - \xi_2)}{2R_1^2} + \frac{k(x_2 + \xi_2)}{2R_2^2} + \frac{2k^2\xi_2x_2(x_2 + \xi_2)}{(k+2)R_2^4} - \frac{kx_2}{R_2^2} \right). \\
 G_{22} = & \frac{1}{2\pi(k+1)} \left(-\frac{1}{2} ((k+2) \ln(R_1R_2) + k \frac{(x_2 - \xi_2)^2}{R_1^2} + k \frac{(x_2 + \xi_2)^2}{R_2^2}) - \right. \\
 & - \frac{kx_2(x_2 + \xi_2)}{R_2^2} - \frac{k^2\xi_2x_2}{k+2} \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 + \xi_2)^2}{R_2^4} + \frac{k+2}{k} (k \ln R_2 + \\
 & \left. + \frac{k^2\xi_2}{k+2} \frac{(x_2 + \xi_2)}{R_2^2} \right) \Big);
 \end{aligned}$$

¹Для построения формул (9) в работе [4] предложен несколько другой подход.

Указанные формулы играют существенную роль при численной реализации метода граничных интегральных уравнений в задачах о деформировании упругой полуплоскости силами, приложенными к границе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В о р о в и ч И.И., А л е к с а н д р о в В.М., Б а б е ш к о В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. — М., 1974. — 456 с. 2. Л у р ь е А.И. Пространственные задачи теории упругости. — М., 1955. — 369 с. 3. М у с х е ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М., 1966. — 707 с. 4. Г о р б у н о в - П о с а д о в М.И., М а л и к о в а Т.А. Расчет конструкций на упругом основании. — М., 1984. — 679 с.

УДК 539.3

М.А.ЖУРАВКОВ (БГУ)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

Построение функций Грина даже для двумерной задачи весьма сложно, и можно назвать лишь немногие случаи, в которых эта проблема конструктивно решена. Возможен другой путь — построение функций, аналогичных в некотором смысле функциям Грина. В этом случае решение задачи уже не получается в замкнутом виде, а представляется через некоторую вспомогательную функцию, являющуюся решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Такой подход впервые был применен Е.Е.Леви. Позже этот метод был развит с более общих позиций М.Жевре. Однако те средства, которыми пользуются Жевре и ряд других авторов, не эффективны на практике. В частности, большие трудности применения этих методов связаны с тем обстоятельством, что ядра интегральных уравнений выражаются через функции, построенные с помощью особых интегралов.

В 1979 г. академик В.Л.Рвачев и профессор В.С.Проценко в работе [1] предложили метод построения квазифункций Грина, опирающийся на использование теории R -функций [2], для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ и основных типов краевых условий. При этом квазифункцией Грина они называют функцию двух переменных, обращающуюся в нуль на границе и имеющую точечную особенность внутри области. Существенно при этом то, что все построения проводятся в рамках элементарных функций для областей D , определяемых неравенствами вида $\omega \geq 0$ ($\omega = 0$ — уравнение границы S области D), где ω — элементарная функция. Ввиду алгоритмической полноты [2] множества элементарных функций уравнение $\omega = 0$ может быть построено для области, граница которой состоит из конечного числа кусков элементарных линий или поверхностей.

Целью настоящей работы является применение метода квазифункций Грина к решению первой основной задачи теории упругости. С помощью этого метода выведена система четырех интегральных уравнений, ядра ко-