УДК 539.3

О.Н.СКЛЯР (БПИ)

МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Уравнение равновесия вязкоупругого тела имеет вид [1]

$$\sum_{j,k,l=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left[E_{ijkl}(x,t)\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_l}\right)-\int_0^t\frac{\partial}{\partial x_j}(R_{ijkl}(x,t-\tau)\times$$
$$\times\frac{\partial u_k(x,\tau)}{\partial x_l}d\tau)\right]=0\quad(i=1,2,3). \tag{1}$$

При достаточно общих предположениях [2] функции $E_{ijkl}(x,t)$, $R_{ijkl}(x, t-\tau)$, $u_k(x,t)$ можно разложить в ряды по полиномам Лагерра $L_n(t)$ [2]:

$$\left.\begin{aligned}
E_{ijkl}(x,t)&=\sum_{m=0}^{\infty}E^{m}_{ijkl}(x)L_m(t);\\
R_{ijkl}(x,t)&=\sum_{m=0}^{\infty}R^{(m)}_{ijkl}L_m(t);\\
u_k(x,t)&=\sum_{m=0}^{\infty}u_k^{(m)}(x)L_m(t).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Подставим ряды (2) в уравнение (1) и воспользуемся следующим правилом Коши для возникающих при этом произведений бесконечных рядов:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}b_k\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}a_mb_{n-m}\right).$$

В результате получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{jk,l=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{m=0}^{n}E^{(n-m)}_{ijkl}(x)\frac{\partial u_k^{(m)}(x)}{\partial x_l}L_{n-m}(t)L_m(t)\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{m=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(R^{(n-m)}_{ijkl}(x)\frac{\partial u_k^{(m)}(x)}{\partial x_l}\int_0^t L_{n-m}(t-\tau)L_m(\tau)d\tau)\right]=0 \tag{3}$$
$$(i=1,2,3).$$

Рассмотрим сначала произведение $L_{n-m}(t)L_m(t)$. Поскольку каждый из сомножителей представляет полином от t степени $n-m$ и m соответственно, то все произведение есть полином степени n, и потому он может быть представлен в виде конечной суммы полиномов Лагерра:

$$L_{n-m}(t)L_m(t)=\sum_{p=0}^{n}a_p^{(n-m,m)}L_p(t).$$

Коэффициент $a_p^{n-m,m}$ этого разложения можно вычислить следующим образом. Так как по определению полиномов Лагерра

$$L_m(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i^{(m)} t^{(i)};$$

$$L_{n-m}(t) = \sum_{i=0}^{n-m} b_i^{n-m} t^i;$$

где $b_i^m = (-1)^i \binom{m}{i} \frac{1}{i!} \equiv ((-1)^m m!) / ((i!)^2 (m-i)!)$,

то по формуле Коши имеем:

$$L_{n-m}(t) L_m(t) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i} b_k^{(n-m)} b_{i-k}^{(m)} \right) t^i \text{ или}$$

$$L_{n-m}(t) L_m(t) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i^{(n-m,m)} t^i, \tag{4}$$

где $\beta_i^{n-m,m} = \sum_{k=0}^{i} b_k^{n-m} b_{i-k}^{(m)}$. (5)

Разложим теперь t^i в ряд по полиномам Лагерра:

$$t^i = \sum_{l=0}^{i} \alpha_l^{(i)} L_l(t). \tag{6}$$

Здесь $l \leqslant i$, а коэффициенты α_l^i вычисляются по формуле [3]:

$$\alpha_l^i = \int_0^\infty t^i e^{-t} L_l(t) dt.$$

Воспользуемся известной формулой [3]:

$$L_l(t) = \frac{e^t}{l!} \frac{d^l}{dt^l} (e^{-t} t^l).$$

Тогда $\alpha_l^{(i)} = \frac{1}{l!} \int_0^\infty t^i \frac{d^l}{dt^l} (t^l e^{-t}) dt.$

Проинтегрировав по частям последний интеграл l раз, получим:

$$\alpha_l^{(i)} = \frac{(-1)^l}{l!} \int_0^\infty \frac{d^l t^i}{dt^l} e^{-t} dt = \frac{(-1)^l i(i-1)\dots(i-l-1)}{l!} \int_0^\infty t^{i-l} t^l e^{-t} dt =$$

$$= \frac{(-1)^l i!}{(i-l)!\, l!} \int_0^\infty t^i e^{-t} dt = \frac{(-1)^l i!\, \Gamma(i+1)}{(i-l)!\, l!} = \frac{(-1)^l (i!)^2}{(i-l)!\, l!},$$

где $\Gamma(i+1)$ — гамма-функция.

Итак,

$$q_i^l = \frac{(-1)^l\,(i!)^2}{(i-l)!\,l!\,l!}\,. \tag{7}$$

Поэтому, внося разложение (6) в формулу (4), получим:

$$L_{n-m}(t)\,L_m(t) = \sum_{p=0}^{n} a_p^{(n-m,m)} L_p(t), \tag{8}$$

где $a_p^{n-m,m} = \sum_{i=p}^{n} \alpha_p^i \beta_i^{(n-m,\,m)}$, причем α_p^i, $\beta_i^{(n-m,m)}$ определены явно формулами (7) и (5).

Рассмотрим теперь фигурирующий в уравнении (3) интеграл $\int_0^t L_{n-m}(t-\tau)\,L_m(\tau)\,d\tau$. Так как $L_{n-m}(t)$ есть полином степени $n-m$ относительно t, то $L_{n-m}(t-\tau) = \sum_{k=0}^{n-m} d_k^{n-m} t^k \tau^{n-m-k}$ и $L_{n-m}(t-\tau)\,L_m(\tau) = \sum_{k=0}^{n} e_k^{n-m,m} t^k \tau^{n-k}$.

Поэтому

$$\int_0^t L_{n-m}(t-\tau)\,L_m(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{n+1} l_k^{(n-m,m)} t^k = \sum_{k=0}^{n+1} q_k^{(n-m,m)} L_k(t)\,. \tag{9}$$

Здесь коэффициенты d_k^{n-m}, $l_k^{(n-m,m)}$, $e_k^{(n-m,m)}$ и $q_k^{(n-m,m)}$ явно выписываются по вышеуказанной схеме.

С учетом уравнений (8) и (9) формула (3) принимает следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{jkl=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{m=0}^{n} E_{ijkl}^{(n-m)}(x) \frac{\partial u_k^{(m)}(x)}{\partial x_l} \sum_{p=0}^{n} a_p^{(n-m,m)} L_p(t)\Big) -$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{ijkl=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{m=0}^{n} R_{ijkl}^{(n-m)}(x) \frac{\partial u_k^{(m)}(x)}{\partial x_l} \sum_{p=0}^{n+1} q_p^{(n-m,m)} L_p(t)\Big) = 0. \tag{10}$$

Поскольку множество функций $\{L_p(t)\}_{p=0}^{\infty}$ образует полную систему линейно-независимых функций [2], то для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ коэффициенты при $L_n(t)$ в формуле (10) должны обратиться в нуль. Это приводит к бесконечной системе дифференциальных уравнений с частными производными для определения неизвестных функций $u_k^m(x)$ $(k = 1, 2, 3;\ m = 0, 1, 2\dots)$. Практическая реализация таких бесконечных систем уравнений связана с их "усечением", другими словами, с заменой бесконечных рядов (2) их частными суммами. Если в соответствии с этим ограничиться в рядах (2) конечными суммами, то для определения $u_k^m(x)$ $(k = 1, 2, 3;\ m = 0, 1, \dots, N)$ получим по вышеуказанной схеме треугольную систему дифференциальных уравнений.

Для того чтобы ее выписать, удержим в первом слагаемом формулы (10) $(N+2)$ члена, а во втором $(N+1)$ член. Получим:

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} a_p^{(n-m,m)} E_{ijkl}^{(n-m)}(x) \frac{\partial u_k^{(m)}(x)}{\partial x_l} L_p(t)\Big) -$$
$$- \sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{p=0}^{n+1} q_p^{(n-m,m)} R_{ijkl}^{(n-m)}(x) \frac{\partial u_k^{(m)}}{\partial x_l} L_p(t)\Big) = 0. \tag{11}$$

Теперь поменяем порядки суммирования в суммах, стоящих в формуле (11) в фигурных скобках. В результате будем иметь:

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{p=0}^{N+1} \sum_{n=p}^{N+1} \sum_{m=0}^{n} a_p^{(n-m,m)} E_{ijkl}^{(n-m)}(x) \frac{\partial u_k^{(m)}(x)}{\partial x_l} L_p(t)\Big) -$$
$$- \sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{p=1}^{N+1} \sum_{n=p-1}^{N} \sum_{m=0}^{n} q_p^{(n-m,m)} R_{ijkl}^{(n-m)}(x) \frac{\partial u_k^{(m)}(x)}{\partial x_l} L_p(t) +$$
$$+ \sum_{p=0}^{1} \sum_{p=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} q_p^{(n-m,m)} R_{ijkl}^{(n-m)}(x) \frac{\partial u_k^{(m)}(x)}{\partial x_l} L_p(t)\Big) = 0. \tag{12}$$

Приравнивая в формуле (12) коэффициент при $L_p(t)$, $p \geqslant 2$, получим

$$\sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{n=p}^{N+1} \sum_{m=0}^{n} a_p^{(n-m,m)} E_{ijkl}^{(n-m)}(x) \frac{\partial u_k^{m}(x)}{\partial x_l} -$$
$$- \sum_{n=p-1}^{N+1} \sum_{m=0}^{n} q_p^{(n-m,m)} R_{ijkl}^{(n-m)}(x) \frac{\partial u_k^{(m)}(x)}{\partial x_l} \Big) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{13}$$

Аналогичная система выписывается и для $p = 0, 1$.

К системе (13) следует добавить граничные условия для выделения единственного решения. Их легко выписать с помощью вышеприведенной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. Ч. 1. — М., 1979. — 384 с. 2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. — М., 1972. — 679 с. 3. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М., 1968. — 344 с.