

В соответствии с приведенной методикой составлена программа на ЭВМ БЭСМ-6 для вычисления функции  $\rho_s = (\theta^*)$  при изменении  $\theta^*$  от 0 до  $\pi/6$ . На рис. 2 представлены второе (а) и четвертое (б) приближения этой функции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И в л е в Д.Д., Е р ш о в Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. — М., 1978. — с. 208.
2. К и м А.Х., Ф л у с о в Н.Н. Контактное взаимодействие коаксиальных оболочек при больших скоростях деформаций. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика, Минск, 1982, вып. 9, с. 3—7.
3. Б и ц е к о К.Б., Г р а м м е л ь Р. Техническая динамика. — Л., 1950. — с. 840.

УДК 539.374

Э.И.СТАРОВОЙТОВ, канд. физ.-мат. наук (БИИЖТ)

### К ИЗГИБУ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОЙ ПЛАСТИНКИ

Трехслойные элементы конструкций обычно набираются из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. Тонкие несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Мягкий наполнитель обеспечивает монолитность конструкции и перераспределение усилий между несущими слоями, служит для защиты от тепловых, химических, радиационных и других нежелательных воздействий.

Геометрические гипотезы, принимаемые для описания деформирования слоев, в основном сводятся к одному из трех следующих вариантов: в первом учитываются деформации поперечного сдвига во всех слоях; во втором — только в мягком слое (модель Э.И.Григолюка [1]); в третьем — принимают гипотезы Кирхгофа для пакета в целом.

Для круглых трехслойных пластин в настоящее время известны только решения задач теории упругости в случае симметрии по толщине [5]. Предлагаемая работа посвящена исследованию круглой пластинки, несущие слои которой толщиной  $h_1 \neq h_2$  выполнены из различных вязкоупругопластичных материалов.

Рассмотрим круглую трехслойную пластинку модели Э.И.Григолюка: для несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа; в полимерном наполнителе, толщина которого  $h_3 = 2c$ , деформированная нормаль остается прямой и несжимаемой. Учитывается работа наполнителя в тангенциальном направлении. Полярная система координат связывается со срединной плоскостью наполнителя. Ось  $z$  направлена в сторону первого слоя.

Малые деформации в слоях выражаются через прогиб пластинки  $w(r, t)$ , радиальные перемещения координатной плоскости  $u(r, t)$  и относительный сдвиг в наполнителе  $\psi(r, t)$ .

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\Psi_{,r} - zw_{,rr}; \quad \epsilon_\varphi^{(1)} = (u + c\Psi - zw_{,r})/r; \quad c \leq z \leq c + h_1; \\ \epsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\Psi_{,r} - zw_{,rr}; \quad \epsilon_\varphi^{(2)} = (u - c\Psi - zw_{,r})/r; \quad -h_2 - c \leq z \leq -c; \\ \epsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z(\Psi_{,r} - w_{,rr}); \quad \epsilon_\varphi^{(3)} = (u + z(\Psi - w_{,r}))/r; \\ \epsilon_{rz}^{(3)} &= \Psi; \end{aligned} \right\} -c \leq z \leq c. \quad (1)$$

(запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующим за ней координатам; верхний индекс  $k = 1, 2, 3$  — номер слоя).

Уравнения равновесия, полученные вариационным методом [1], принимают в нашем случае вид:

$$\left. \begin{aligned} T_{r,r} + (T_r - T_\varphi)/r &= -p; \quad H_{r,r} + (H_r - H_\varphi)/r - Q = 0; \\ M_{r,rr} + (2M_{r,r} - M_{\varphi,r})/r &= -q. \end{aligned} \right\} (2)$$

Здесь  $T_\alpha, Q, H_\alpha, M_\alpha$  — обобщенные внутренние усилия и моменты:

$$\left. \begin{aligned} T_\alpha &= \sum_k T_\alpha^k = \sum_k \int_{h_k} \sigma_\alpha^k dz; \quad M_\alpha = \sum_k M_\alpha^k = \sum_k \int_{h_k} \sigma_\alpha^k z dz; \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}); \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz; \quad (\alpha = r, \varphi); \end{aligned} \right\} (3)$$

$p(r, t), q(r, t)$  — проекции внешней распределенной по поверхности пластины нагрузки на оси  $z, r$ ;  $t$  — время;  $\sigma_\alpha^k, \sigma_{rz}^{(3)}$  — напряжения. В силу осесимметричной нагрузки параметры деформирования пластинки не зависят от координаты  $\varphi$ .

Напряжения и деформации связаны в слоях соотношениями состояния, предложенными В.В.Москвитиним [2]:

$$\left. \begin{aligned} S_\alpha^k &= \begin{cases} 2G_0^k (\mathfrak{Z}_\alpha^k (1 - \omega^k) - \int_0^t R^k(t-\tau) (1 - \omega^k(\tau)) \mathfrak{Z}_\alpha^k(\tau) d\tau); & \epsilon_u^k > \epsilon_s^k; \\ 2G_0^k (\mathfrak{Z}_\alpha^k - \int_0^t R^k(t-\tau) \mathfrak{Z}_\alpha^k(\tau) d\tau); & \epsilon_u^k \leq \epsilon_s^k; \quad (R^{(1)} \equiv R^{(2)} \equiv 0); \end{cases} \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= \begin{cases} G_0^{(3)} (\psi (1 - \omega^{(3)}) - \int_0^t R^{(3)}(t-\tau) (1 - \omega^{(3)}(\tau)) \psi(\tau) d\tau); & \epsilon_u^{(3)} > \epsilon_s^{(3)}; \\ G_0^{(2)} (\psi - \int_0^t R^{(3)}(t-\tau) \psi(\tau) d\tau); & \epsilon_u^{(3)} \leq \epsilon_s^{(3)}; \end{cases} \\ \sigma^k &= 3K_0^k (\epsilon^k \int_0^t V^k(t-\tau) \epsilon^k(\tau) d\tau); \quad (V^{(1)} \equiv V^{(2)} \equiv 0). \end{aligned} \right\} (4)$$

Здесь  $S_\alpha^k, \mathfrak{Z}_\alpha^k, \sigma^k, \epsilon^k$  — девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $\omega^k \equiv \omega^k(\epsilon_u^k)$  — универсальные функции (нелинейности в полимерном и пластичности [7] в металлических слоях), определяемые экс-

периментально;  $\epsilon_s^k$  — пороговое значение интенсивности деформаций;  $R^k(t)$ ,  $V^k(t)$  — ядра сдвиговой и объемной релаксации,  $G_0^k$ ,  $K_0^k$  — константы упругости материалов.

Краевая задача (1) — (4) замыкается добавлением граничных условий. Для ее решения применим один из рассмотренных в [4] итерационных методов для неоднородных сред, основанный на методе упругих решений А.И.Ильюшина [3] и его модификации [2]. В этом случае конечная система уравнений на  $n$ -м шаге приближения для определения искоемых функций  $U^n$ ,  $\psi^n$ ,  $w^n$  принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} L_2 (a_1 U^n + a_2 \psi^n - a_3 w_{,r}^n) &= -p + p_\omega^{n-1}; \\ L_2 (a_2 U^n + a_4 \psi^n - a_5 w_{,r}^n) - 2cG_3 \psi^n &= h_\omega^{n-1}; \\ L_3 (a_3 U^n + a_5 \psi_{,r}^n - a_6 w_{,r}^n) &= -q + q_\omega^{n-1}. \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\text{где } a_1 = \sum_k (K_0^k + 4G_0^k/3) h_k; \quad a_2 = c ((K_0^{(1)} + 4G_0^{(1)}/3) h_1 - (K_0^{(2)} + 4G_0^{(2)}/3) h_2);$$

$$a_3 = h_1 (c + h_1/2) (K_0^{(1)} + 4G_0^{(1)}/3) - h_2 (c + h_2/2) (K_0^{(2)} + 4G_0^{(2)}/3);$$

$$a_4 = c^2 (h_1 (K_0^{(1)} + 4G_0^{(1)}/3) + h_2 (K_0^{(2)} + 4G_0^{(2)}/3) + 2c (K_0^{(3)} + 4G_0^{(3)}/3)/3);$$

$$a_5 = c (h_1 (c + h_1/2) (K_0^{(1)} + 4G_0^{(1)}/3) + h_2 (c + h_2/2) (K_0^{(2)} + 4G_0^{(2)}/3) + 2c^2 (K_0^{(3)} + 4G_0^{(3)}/3)/3);$$

$$a_6 = h_1 (c^2 + ch_1 + h_1^2/3) (K_0^{(1)} + 4G_0^{(1)}/3) + h_2 (c^2 + ch_2 + h_2^2/3) \times (K_0^{(2)} + 4G_0^{(2)}/3) + 2c^3 (K_0^{(3)} + 4G_0^{(3)}/3)/3.$$

Перемещения и линейные размеры пластинки отнесены к ее радиусу, нагрузка и константы упругости — к единице давления (1 Па).

Члены с индексом "n-1" называются дополнительными "внешними" нагрузками и определяются по результатам предыдущего приближения:

$$p_\omega^{n-1} = (T_{r,r}^\omega + (T_r^\omega - T_\varphi^\omega)/r)^{n-1}; \quad q_\omega^{n-1} = (M_{r,rr}^\omega + (2M_{r,r}^\omega - M_{\varphi,r}^\omega)/r)^{n-1};$$

$$h_\omega^{n-1} = (H_{r,r}^\omega + (H_r^\omega - H_\varphi^\omega)/r - Q^\omega)^{n-1};$$

$$T_a^\omega = \sum_k T_a^k \omega = \sum_k \int_{h_k} d_a^k \omega dz; \quad M_a^\omega = \sum_k M_a^k \omega = \sum_{k h_k} \int d_a^k \omega z dz;$$

$$d_a^k \omega = 2G_0^k (\omega^k \mathcal{E}_a^k + \int_0^t R^k(t-\tau) (1-\omega^k) \mathcal{E}_a^k d\tau) + 3K_0^k \int_0^t V^k(t-\tau) \epsilon^k d\tau;$$

$$H_a^\omega = M_a^{(3)} \omega + c (T_a^{(1)} \omega - T_a^{(2)} \omega); \quad Q^\omega = G_0^{(3)} \int_{h_3}^r (\psi + \int_0^t R^{(3)}(t-\tau) \times \\ \times (1-\omega^{(3)}) \psi d\tau) dz.$$

Здесь  $L_2, L_3$  — линейные дифференциальные операторы:  $L_2(f) \equiv (1/r \times x(rf))_{,r}$ ,  $L_3$  — оператор Бесселя;

$$L_3(f) \equiv 1/r (rL_2(f))_{,r}. \quad (6)$$

Таким образом, на каждом шаге рассмотренного метода линейных приближений получаем задачу теории упругости с дополнительными "внешними" нагрузками, которые определяются по результатам предыдущего приближения, а при  $n = 1$  их необходимо положить равными нулю.

Решение системы (5) имеет следующий итерационный вид (с учетом гладкости в начале системы координат):

$$\psi^n = C_1^n I_1(\beta r) + \psi_4^n; \\ u^n = a_3 (L_3^{-1}(q - q_\omega^{n-1}) - a_6 L_2^{-1}(p - p_\omega^{n-1})/a_3 + (a_5 a_3 - a_2 a_6) \psi^n/a_3 + \\ + C_2^n r) / (a_1 a_6 - a_3^2); \quad (7)$$

$$w^n = (b_2 (C_1^n I_0(\beta r) / \beta + \int \psi_4^n dr) - \int (a_3 L_2^{-1}(p - p_\omega^{n-1})/a_1 - \\ - L_3^{-1}(q - q_\omega^{n-1})) dr + C_3^n r^2 + C_4^n) / b_3.$$

Здесь  $L_2^{-1}, L_3^{-1}$  — интегральные операторы, обратные операторам (6):  $L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int_r^1 \int r f r dr$ ;  $L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int_r^1 \int_r^1 \int r f r dr dr$ ;  $\psi_4^n$  — частное решение модифицированного уравнения Бесселя, выделяемого из системы (5) для функции  $\psi^n$ :

$$\psi_4^n = -K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f^{n-1} r dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f^{n-1} r dr, \quad (8)$$

где  $f^{n-1} = b_3 (h_\omega^{n-1} + a_2 (p - p_\omega^{n-1})/a_1 - a_3 b_2 (p - p_\omega^{n-1})/a_1 b_3 + b_2 \int (q - q_\omega^{n-1}) \times \\ \times r dr / b_3 r) / (b_1 b_3 - b_2^2)$ ;  $\beta^2 = 2cb_3 G_0^{(3)} / (b_1 b_3 - b_2^2)$ ;  $b_1 = a_1 - a_2^2/a_1$ ;  $b_2 = a_5 - a_2 a_3/a_1$ ;  $b_3 = a_6 - a_3^2/a_1$ .

Константы интегрирования  $C_1^n, C_2^n, C_3^n, C_4^n$  определяются на каждом шаге приближения из граничных условий. Например, при  $p = 0, q = \text{const}$  и жестко заделанном контуре пластинки ( $u = \psi = w = w_r = 0$  при  $r = 1$ ) получаем:

$$C_1^n = -\psi_4^n / I_1(\beta) |_{r=1}; \quad C_2^n = -(q/16 - L_3^{-1}(q_\omega^{n-1}) |_{r=1} + \\ + a_6 L_2^{-1}(p_\omega^{n-1})/a_3 |_{r=1});$$

$$C_3^n = 2(-a_3 L_2^{-1}(\rho_\omega^{n-1})/a_1|_{r=1} - q/16 + L_3^{-1}(q_\omega^{n-1})|_{r=1}); \quad (9)$$

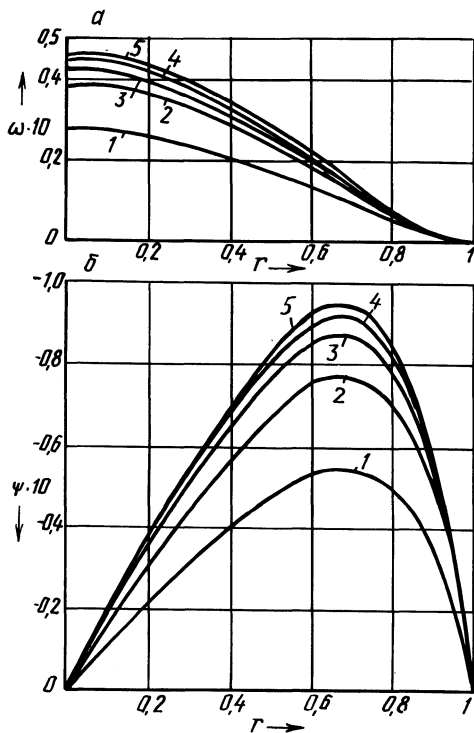
$$C_4^n = -b_2(C_1^n/l_0(\beta)/\beta + \int \psi_q^n dr|_{r=1}) - \int (a_3 L_2^{-1}(\rho_\omega^{n-1})/a_1 - L_3^{-1}(q_\omega^{n-1})) dr|_{r=1} - q/64 - C_3^n.$$

В этом случае на первом шаге приближения, который соответствует задаче идеальной теории упругости, частное решение (8) можно выписать в конечном виде, т.е.

$$\psi_q^{(1)} = -b_2 q r (4cb_3 G_0^{(3)}).$$

Это позволяет получить точное решение задачи теории упругости, представляющее самостоятельный интерес. Положим в формулах (7) — (9)  $n = 1$  и опустим для простоты номер приближения. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \psi &= b_2 q (I_1(\beta r) / I_1(\beta) - r) (4cb_3 G_0^{(3)}); \\ u &= a_3 ((a_5 - a_2 a_6 / a_3) \psi + q r (r^2 - 1) / 16) / (a_1 a_6 - a_3^2); \\ w &= b_2^2 q ((I_0(\beta r) - I_0(\beta)) / \beta I_1(\beta) - (r^2 - 1) / 2) 4cb_3^2 G_0^3 + \\ &+ q (r^2 - 1)^2 / (64b_3). \end{aligned} \right\} (10)$$



Численная реализация решений (7) — (9) и (10) проведена на ЭВМ ЕС-1022. В качестве материалов несущих слоев принимался алюминиевый сплав D16Т, наполнитель — политетрафторэтилен. В работе [4] проведена обработка соответствующих известных экспериментальных данных и содержатся необходимые универсальные функции, ядра релаксации и константы упругости, введенные в соотношения (4).

Рис. 1 иллюстрирует практическую сходимость примененного метода последовательных приближений. Принятое за решение 5-е приближение отличается от предыдущего не более чем на 2,4 %. Рис. 2 показывает возрастание

Рис. 1. Сходимость итерационного процесса:  
а — прогиб  $w$ ; б — относительный сдвиг  $\psi$ ;  
1—5 — номера приближения

Рис. 2. Зависимость прогиба  $w$  пластинки от распределения толщин несущих слоев (сплошная линия — упругие прогибы; пунктир — нелинейная вязкоупругопластичность): 1, 1' —  $h_1 = h_2 = 0,05$ ; 2, 2' —  $h_1 = 0,08$ ;  $h_2 = 0,02$ ; 3, 3' —  $h_1 = 0,1$ ;  $h_2 = 0$

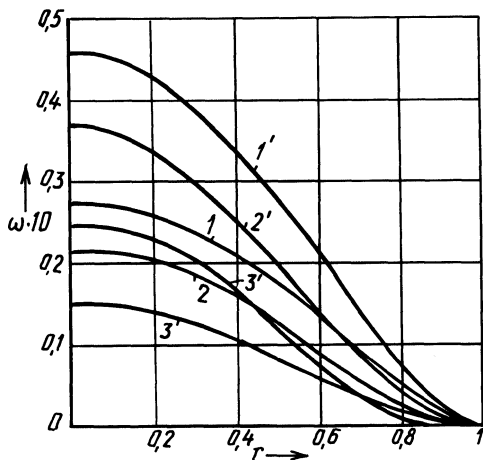
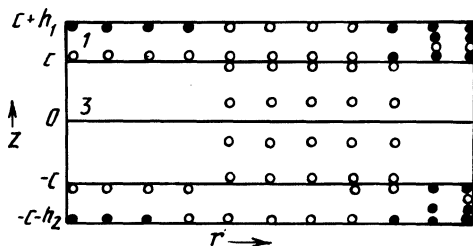


Рис. 3. Распределение областей пластического и нелинейного деформирования материалов слоев пластинки по ее поперечному сечению: 1, 2, 3 — номер слоя; • — пластические (нелинейные) области, возникшие при  $t = 0$ ; ○ — соответствующие области, появившиеся в процессе деформации за время  $t_0$



жесткости пластинок с увеличением их асимметрии при постоянной толщине заполнителя  $h_3 = 0,15$ . Распределение областей пластического и нелинейного деформирования по поперечному сечению пластинки и рост их с течением времени показаны на рис. 3. Максимальные интенсивности деформаций по слоям:  $\epsilon_u^{(1)} = 1,05\%$ ,  $\epsilon_u^{(2)} = 0,86\%$ ,  $\epsilon_u^{(3)} = 5,3\%$ . Соответствующие значения функций пластичности и нелинейности:  $\omega_1 = 0,307$ ;  $\omega_2 = 0,273$ ;  $\omega_3 = 0,210$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. — М., 1973. — 170 с. 2. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. — М., 1972. — 327 с. 3. Ильюшин А.А. Пластичность. — М., 1948. — 376 с. 4. Старовойтов Э.И., Старовойтова Т.А. К изгибу двухслойных металлополимерных пластин. — Проблемы прочности, 1984, № 3, с. 100–104. 5. Gupta A., Sharma K.P. Axisymmetric flexure of circular sandwich plate including transverse of shear in facings. — Z. angew. Math. und Mech., 1982, 62, N 10, pp. 533–538.