

величину и расположение температурного интервала ползучести, добиваясь уменьшения или увеличения зоны растягивающих напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кардаш С.Т., Чемохуд Е.В. Исследование термоупругих напряжений путем "замораживания" с осуществлением заданного перепада температуры. — В кн.: Исследование температурных напряжений. — М., 1972, с. 25—32. 2. Буткевич Н.Н. Формирование остаточных напряжений при изготовлении моделей из материала ЭД-20М. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1981, вып. 8, с. 70—73. 3. Буткевич Н.Н. Исследование напряженного состояния кованых штампов с неоднородным термическим упрочнением? Дис. ... канд. техн. наук. Минск, 1972, с. 38. 4. Метод фотоупругости/Под ред. Г.П.Хесина. — М., 1975, т. 1, с. 379.

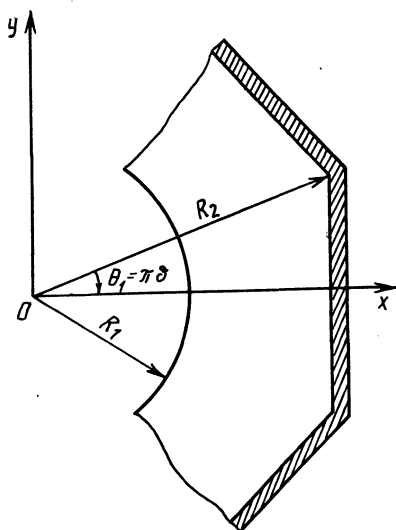
УДК 534.1:539.3:539.374

Н.Н.ФЛУСОВ (АН БССР)

РАСЧЕТ ТОЛСТЫХ ТРУБ НЕКРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ, НАГРУЖЕННЫХ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Целью данной работы является определение напряженно-деформированного состояния толстой трубы с центральным круговым отверстием (рис. 1), внешний контур которой имеет вид правильного N -угольника ($N \geq 4$).

Предполагается, что труба заключена в абсолютно жесткую, но гладкую обойму и находится под действием внутреннего давления. Кроме того, будем считать, что возникающие пластические деформации являются малыми и переход в область пластического деформирования происходит при выполнении условия Мизеса для осесимметричного состояния при плоской деформации.



Для решения поставленной задачи воспользуемся методом возмущений [1], в соответствии с которым неизвестные компоненты напряженно-деформированного состояния будем искать в виде:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{ij}^{(n)} \delta^n; \quad u_i = \sum_{n=0}^{\infty} u_i^{(n)} \delta^n, \quad (1)$$

где δ — некоторый параметр, а $\sigma_{ij}^{(0)}$, $u_i^{(0)}$ — известное решение рассматриваемой задачи для случая, когда отсутствует возмущение.

Рис. 1. Поперечное сечение трубы в жесткой обойме

В данном случае за начальную принимается задача Ляме для защемленного го внешнего контура. Внутренний и внешний радиусы трубы равны соответственно R_1 и R_2 , а малый параметр

$$\delta = 1/N. \quad (2)$$

Уравнение правильного многоугольника в полярных координатах имеет вид:

$$r \cos \theta^* = R_2 \cos (\pi \delta), \quad (3)$$

где $\theta^* = \theta - 2E[\theta/\pi\delta]\pi\delta$. Знаком $E[\cdot]$ здесь обозначена целая часть величины, заключенной в скобках.

Переходя к безразмерным величинам и разлагая правую часть уравнения (3) в ряд, с учетом выражения (2) получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \beta + \beta/\cos \theta^* \cdot (-\pi\delta^2/2! + \dots + (-1)^n (\pi\delta)^{2n}/(2n)! + \dots); \\ \bar{R} &= \rho/\beta = 1 + (1/\cos \theta^*) (-\pi\delta)^2/2! + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $\rho = r/r_T^{(0)}$; $\beta = R_2/r_T^{(0)}$; $r_T^{(0)}$ — радиус области пластичности для начальной задачи.

Из выражений (4) следует, что ввиду четности функции $\rho(\delta)$ в рядах (1) останутся только члены с четными индексами. Кроме того, так как нагрузка на границе области пластичности не варьируется и задача является статически определимой, то для компонент напряжений в указанной области

$$\sigma_{ij}^{(n)} \rho = 0, n \geq 1. \quad (5)$$

1. Нулевое приближение $n = 0$. Определение напряжений и перемещений для трубы в жесткой обойме при действии внутреннего давления, а также радиуса зоны пластичности не представляет сложности [2]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)e} &= A - B/\rho^2; \quad \sigma_\theta^{(0)e} = A + B/\rho^2; \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0; \\ u_\rho^{(0)e} &= ((1 - \mu - 2\mu^2)A + (1 + \mu)B/\rho^2)\rho/E; \\ u_\theta^{(0)e} &= 0; \quad \sigma_\rho^{(0)p} = \ln(\rho/a) + C; \quad \sigma_\theta^{(0)p} = \ln(\rho/a) + C + 1; \\ \tau_{\rho\theta}^{(0)p} &= 0; \quad u_\rho^{(0)e} = (1/E)(D/\rho); \quad u_\theta^{(0)p} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $a = R_1/r_T^{(0)}$; A, B, C, D — некоторые постоянные, определяемые из граничных условий на радиусах R_1 и R_2 и условий сопряжения на границе между упругой и пластической областями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)e}|_{\rho=a} &= -p; \quad u_\rho^{(0)e}|_{\rho=\beta} = 0; \\ [\sigma_\theta] &= [\sigma_\rho] = [u_\rho]|_{\rho=1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь перемещения отнесены к $r_T^{(0)}$, а напряжения и модули упругости к σ_T .

2. Второе приближение $n = 2$. Линеаризованные условия сопряжения на линии $\rho = 1$ имеют вид [1]:

$$\left[\sigma_{\rho}^{(II)} + \frac{d\sigma_{\rho}^{(I)}}{d\rho} \rho_{s1} + \frac{d^2\sigma_{\rho}^{(0)}}{d\rho^2} \frac{\rho_{s1}^2}{2} + \frac{d\sigma_{\rho}^{(0)}}{d\rho} \rho_{s2} \right] = 0, \quad (8)$$

где ρ_{sn} — приближение радиуса текучести с номером n .

Используя выражения (5) и (6) и учитывая, что $\sigma_{\rho}^{(I)} = 0$, $\rho_{s1} = 0$, получим:

$$\sigma_{\rho}^{(II)e} |_{\rho=1} = 0. \quad (9)$$

Аналогично:

$$\tau_{\rho\theta}^{(II)e} |_{\rho=1} = 0. \quad (10)$$

Линеаризованные условия на границе $\rho = \beta$ имеют вид [1]:

$$\left. \begin{aligned} & \tau_{\rho\theta}^{(II)} - (\sigma_{\theta}^{(0)} - u_{\rho}^{(0)}) (\dot{\bar{R}}_2 - \bar{R}_1 \dot{\bar{R}}_1) - (\sigma_{\theta}^{(I)} - \sigma_{\rho}^{(II)}) \dot{\bar{R}}_1 + \\ & + \frac{d}{d\rho} (\tau_{\rho\theta}^{(I)} - (\sigma_{\theta}^{(0)} - \sigma_{\rho}^{(0)}) \dot{\bar{R}}_1) \rho_1 = 0; \\ & u_{\rho}^{(II)} - \frac{\dot{\bar{R}}_1}{2} u_{\rho}^{(0)} - \dot{\bar{R}}_1 u_{\theta}^{(II)} + \frac{du_{\rho}^{(I)}}{d\rho} \rho_1 + \frac{d^2 u_{\rho}^{(0)}}{d\rho^2} \frac{\rho_1^2}{2} + \\ & + \frac{du_{\rho}^{(0)}}{d\rho} \rho_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подстановка исходных выражений (6) в уравнения (11) дает:

$$\left. \begin{aligned} & \tau_{\rho\theta}^{(II)e} |_{\rho=\beta} = - \frac{\pi^2}{2\beta^2} \frac{\sin \theta^*}{\cos^2 \theta^*} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(1)} \sin(Nm \theta^*); \\ & u_{\rho}^{(II)e} |_{\rho=\beta} = - ((1 + \mu) B / \beta^2 - (1 - \mu - 2\mu^2) A) \pi^2 \beta / 2E \cos \theta^* = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(2)} \cos(Nm \theta^*), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $a_m^{(i)}$ — коэффициенты разложения Фурье соответствующих функций.

Используя решения [3] для кольца с граничными условиями полученного типа (9) — (12), имеем:

$$\sigma_{\rho}^{(II)e} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(1)}(\rho) \cos(Nm \theta^*);$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(II)e} &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(2)}(\rho) \cos(Nm\theta^*); \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)e} &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(3)}(\rho) \sin(Nm\theta^*); \\ u_{\rho}^{(II)e} &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(4)}(\rho) \cos(Nm\theta^*); \\ u_{\theta}^{(II)e} &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(5)}(\rho) \sin(Nm\theta^*), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где $b_m^{(i)}(\rho)$ — некоторые известные функции ρ , конкретный вид которых не приводится ввиду их громоздкости.

Используя соотношения (7) и условие непрерывности кольцевых напряжений при переходе из упругой области в пластическую, получим с учетом уравнения (8):

$$\sigma_{\theta}^{(II)e} \big|_{\rho=1} = 2\rho_{s2}.$$

Из подстановки соответствующего выражения из формул (13) следует

$$\rho_{s2}(\theta^*) = \frac{1}{2} \sigma_{\theta}^{(II)e} \big|_{\rho=1} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(2)}(1) \cos(Nm\theta^*). \quad (14)$$

3. Четвертое приближение $n = 4$. Линеаризованные условия на границе соприкосновения $\rho = 1$ имеют вид:

$$\left[\sigma_{\rho}^{(IV)} + \frac{d\gamma_{\rho}^{(0)}}{d\rho} \rho_{s4} + \frac{d\sigma_{\rho}^{(II)}}{d\rho} \rho_{s2} + \frac{d^2\sigma_{\rho}^{(0)}}{d\rho^2} \frac{\rho_{s2}^2}{2} \right] \big|_{\rho=1} = 0. \quad (15)$$

Здесь учтено, что $\rho_{s1} = \rho_{s3} = 0$.

Подставляя в уравнение (15) соотношения (6), (13) и (14), после преобразований находим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(IV)e} \big|_{\rho=1} &= \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} (b_m^{(2)}(1) - 2b_m^{(1)'}(1)) \cos(Nm\theta^*) \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(2)}(1) \cos(Nm\theta^*) = \sum_{m=0}^{\infty} t_m^{(1)} \cos(Nm\theta^*). \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(IV)e} \big|_{\rho=1} &= -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(3)'}(1) \sin(Nm\theta^*) \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(2)}(1) \times \\ &\times \cos(Nm\theta^*) = \sum_{m=0}^{\infty} t_m^{(2)} \sin(Nm\theta^*). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь, как и далее, $t_m^{(i)}$ — коэффициенты разложения Фурье соответствующих функций.

Линеаризованные граничные условия на $\rho = \beta$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & \tau_{\rho\theta}^{(IV)} + (\sigma_{\rho}^{(0)} - \sigma_{\rho}^{(0)}) - (-\dot{\bar{R}}_4 + \dot{\bar{R}}_2 \dot{\bar{R}}_2) - (\sigma_{\theta}^{II} - \sigma_{\rho}^{II}) \dot{\bar{R}}_2 + \\
 & + \frac{d}{d\rho} (\tau_{\rho\theta}^{(III)} - (\sigma_{\theta}^{(III)} - \sigma_{\rho}^{(III)}) \dot{\bar{R}}_2) \rho_2 = 0; \\
 & u_{\rho}^{(IV)} - u_{\rho}^{(0)} \dot{\bar{R}}_2^2 - \dot{\bar{R}}_2 u_{\theta}^{(III)} + \frac{du_{\rho}^{(0)}}{d\rho} \rho_4 + \frac{du_{\rho}^{(II)}}{d\rho} \rho_2 + \\
 & + \frac{d^2 u_{\rho}^{(0)}}{d\rho^2} \frac{\rho_2^2}{2} = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

При выводе этих выражений учтено, что $\bar{R}_1 = \bar{R}_3 = 0$.

Подставляя в выражения (18) значения напряжений и перемещений предыдущих приближений, получим:

$$\begin{aligned}
 & \tau_{\rho\theta}^{(IV)e} |_{\rho=\beta} = \frac{\pi^2}{2} \frac{\sin \theta^*}{\cos^2 \theta^*} \sum_{m=0}^{\infty} (b_m^{(1)}(\beta) - b_m^{(2)}(\beta)) \cos(Nm\theta^*) - \\
 & - \frac{\pi^4}{24\beta} \left(1 + \frac{6}{\cos \theta^*}\right) \frac{\sin \theta^*}{\cos^2 \theta^*} + \frac{\pi^2 \beta}{2 \cos \theta^*} \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(3)}(\beta) \sin(Nm\theta^*) - \right. \\
 & \left. - \frac{\pi^2}{2\beta^2} \frac{\sin \theta^*}{\cos^2 \theta^*} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} t_m^{(3)} \sin(Nm\theta^*); \\
 & u_{\rho}^{(IV)e} |_{\rho=\beta} = \frac{\pi^4}{4E_1} \frac{\sin^2 \theta^*}{\cos^4 \theta^*} (1 - \mu - 2\mu^2) A\beta + \frac{1 + \mu}{2\beta} - \\
 & - \frac{\pi^2}{2} \frac{\sin \theta^*}{\cos^2 \theta^*} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(5)}(\beta) \sin(Nm\theta^*) - \frac{\pi^4}{24E_1^2} ((1 - \mu - 2\mu^2) A - \\
 & - \frac{1 + \mu}{2\beta^2}) \frac{\beta}{\cos \theta^*} + \frac{\pi^2 \beta}{2 \cos \theta^*} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(4)}(\beta) \cos(Nm\theta^*) - \\
 & - \frac{\pi^4}{\beta} \frac{1 + \mu}{E_1 \cos^2 \theta^*} = \sum_{m=0}^{\infty} t_m^{(4)} \cos(Nm\theta^*).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Из [3] следует, что решения для кольца при граничных условиях (16), (17) и (19) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{\rho}^{(IV)e} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(1)}(\rho) \cos(Nm\theta^*); \\
 & \sigma_{\theta}^{(IV)e} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(2)}(\rho) \cos(Nm\theta^*);
 \end{aligned}$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(IV)e} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(3)}(\rho) \sin(Nm\theta^*);$$

$$u_{\rho}^{(IV)e} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(4)}(\rho) \cos(Nm\theta^*);$$

$$u_{\theta}^{(IV)e} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(5)}(\rho) \sin(Nm\theta^*).$$

Из условия непрерывности кольцевых напряжений при $\rho = 1$ четвертое приближение радиуса зоны пластичности

$$\begin{aligned} \rho_{s4}(\theta^*) = & \frac{1}{2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} d_m^{(2)}(1) \cos(Nm\theta^*) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (b_m^{(2)})^1(1) + \right. \\ & \left. + b_m^{(2)}(1) \right) \cos(Nm\theta^*) \times \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(2)}(1) \cos(Nm\theta^*) \Big). \end{aligned}$$

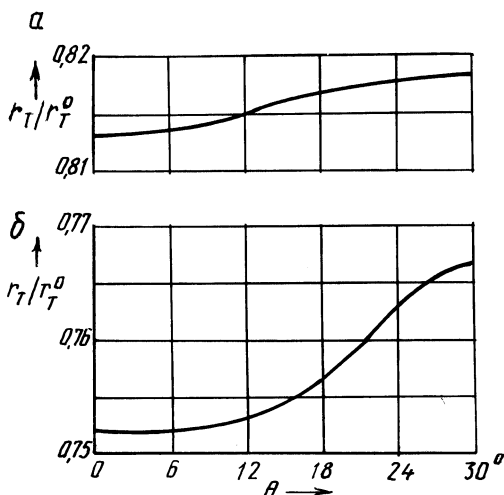


Рис. 2. Второе (а) и четвертое (б) приближение функции $\rho_s = (\theta^*)$

Окончательно безразмерный радиус зоны пластичности, рассчитанный с точностью до четвертого порядка малости, вычисляется по формуле

$$\rho_s(\theta^*) = 1 + \delta^2 \rho_{s2}(\theta^*) + \delta^4 \rho_{s4}(\theta^*).$$

Рассмотрим случай шестигранной трубы ($N=6$) с внутренним радиусом $R_1 = 0,01$ м и внешним $R_2 = 0,025$ м под действием внутреннего давления $p = 1,75 \sigma_T$.

В соответствии с приведенной методикой составлена программа на ЭВМ БЭСМ-6 для вычисления функции $\rho_s = (\theta^*)$ при изменении θ^* от 0 до $\pi/6$. На рис. 2 представлены второе (а) и четвертое (б) приближения этой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. И в л е в Д.Д., Е р ш о в Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. — М., 1978. — с. 208.
2. К и м А.Х., Ф л у с о в Н.Н. Контактное взаимодействие коаксиальных оболочек при больших скоростях деформаций. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика, Минск, 1982, вып. 9, с. 3—7.
3. Б и ц е к о К.Б., Г р а м м е л ь Р. Техническая динамика. — Л., 1950. — с. 840.

УДК 539.374

Э.И.СТАРОВОЙТОВ, канд. физ.-мат. наук (БНИИЖТ)

К ИЗГИБУ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОЙ ПЛАСТИНКИ

Трехслойные элементы конструкций обычно набираются из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. Тонкие несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Мягкий наполнитель обеспечивает монолитность конструкции и перераспределение усилий между несущими слоями, служит для защиты от тепловых, химических, радиационных и других нежелательных воздействий.

Геометрические гипотезы, принимаемые для описания деформирования слоев, в основном сводятся к одному из трех следующих вариантов: в первом учитываются деформации поперечного сдвига во всех слоях; во втором — только в мягком слое (модель Э.И.Григолюка [1]); в третьем — принимаются гипотезы Кирхгофа для пакета в целом.

Для круглых трехслойных пластин в настоящее время известны только решения задач теории упругости в случае симметрии по толщине [5]. Предлагаемая работа посвящена исследованию круглой пластинки, несущие слои которой толщиной $h_1 \neq h_2$ выполнены из различных вязкоупругопластичных материалов.

Рассмотрим круглую трехслойную пластинку модели Э.И.Григолюка: для несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа; в полимерном наполнителе, толщина которого $h_3 = 2c$, деформированная нормаль остается прямолинейной и несжимаемой. Учитывается работа наполнителя в тангенциальном направлении. Полярная система координат связывается со срединной плоскостью наполнителя. Ось z направлена в сторону первого слоя.

Малые деформации в слоях выражаются через прогиб пластинки $w(r, t)$, радиальные перемещения координатной плоскости $u(r, t)$ и относительный сдвиг в наполнителе $\psi(r, t)$.