

уравнений поверхностных связей на рассмотренном примере расчета цилиндрической оболочки показывает, что

1) точечные поверхностные связи на любых участках поверхности улучшают решение в окрестности выбранных точек и ухудшают в других (под участком поверхности понимается ее часть с непрерывной нормалью);

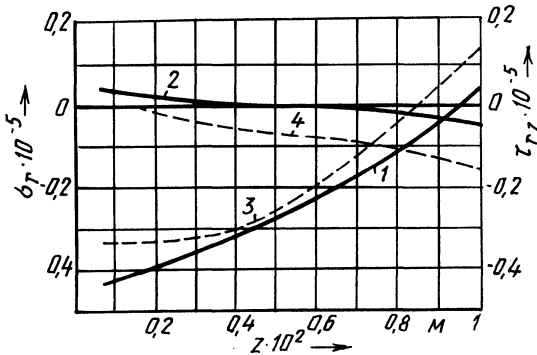


Рис. 5. Графики нормальных σ_r (кривые 1, 3) и касательных τ_{rz} (кривые 2, 4) напряжений при $NM = 5$ на участках поверхности $r = 0,5$, $0 < z < 1$ (сплошная линия) и $r = 1$, $0 < z < 1$ (пунктир)

- 2) интегральные условия хотя и не выполняют точно поверхностные условия в отдельных точках, но обеспечивают достаточно малую невязку выполнения поверхностных условий на участке интегрирования;
- 3) на участках поверхности, свободных от нагрузки, не следует заранее выполнять краевые условия (ни точно, ни интегрально);
- 4) на нагруженных участках поверхности следует заранее выполнять краевые условия для всех напряжений в интегральном или другом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В.Ф., Крушевский А.Е. Некоторые вопросы расчета корпусных деталей машин на основе методов аналитической механики с применением ЭВМ. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1973, с. 111—120. 2. Ревич В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. — М., 1977. — 227 с.

УДК 539.319

И.Ф.ШИДЛОВСКИЙ (БПИ)

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА К РАСЧЕТУ НА КРУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИЙ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В качестве металлоконструкций из тонкостенных элементов взята рама автомобиля МАЗ-509. При расчете предполагается, что соединение элементов металлоконструкции жесткое и ее боковая поверхность свободна от внешних

сил. Пренебрегаем объемными силами. Рама закреплена в плоскости yOz в зоне заднего моста автомобиля так, что возможны ее перемещения вдоль продольной оси. Это дает возможность исключить изгиб, который сопровождается кручением рамы. Свободный конец рамы закручивается на некоторый угол φ вокруг ее продольной оси симметрии Ox в направлении, показанном круговой стрелкой на рис. 1. Необходимо определить напряженное состояние той части металлоконструкции, которая подвергается кручению. Как показано в [1], такую задачу можно решить, используя вариационный принцип Лагранжа.

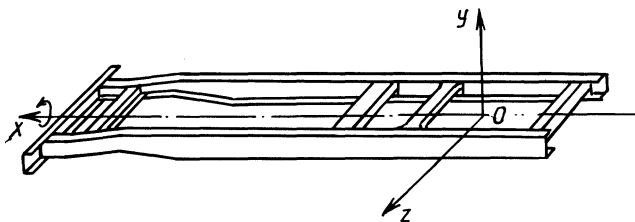


Рис. 1. К расчету рамы автомобиля на кручение

Значения компонент тензора напряжений находим, используя обобщенный закон Гука, записанный в декартовых координатах. Компонентами упругих перемещений точек рамы задаемся в виде трехкратных степенных рядов:

$$U = \sum_{m=0}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} \sum_{p=1}^{p_1} x^m y^{2n-1} z^{2p-1} U_{m, 2n-1, 2p-1};$$

$$V = \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=0}^{n_1} \sum_{p=1}^{p_1} x^m y^{2n} z^{2p-1} V_{m, 2n, 2p-1};$$

$$W = \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} \sum_{p=0}^{p_1} x^m y^{2n-1} z^{2p} W_{m, 2n-1, 2p}.$$

При решении задачи в первом приближении ограничиваемся полиномами третьей степени:

$$U = yzU_{011} + xyzU_{111};$$

$$V = xzV_{101} + x^2zV_{201};$$

$$W = -xyW_{110} - x^2yW_{210}.$$

Из условия отсутствия касательных напряжений $\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 0$ на боковой поверхности рамы получаем:

$$V_{101} = W_{110}; \quad V_{201} = W_{210}. \quad (1)$$

Учитывая уравнение (1), ряды упругих перемещений запишем в виде:

$$U = yzU_{011} + xyzU_{111}; \quad V = xzV_{101} + x^2zV_{201};$$

$$W = -xyV_{101} - x^2yV_{201}.$$

Используя уравнения Ляме $\Delta U + (\gamma-1) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$; $\Delta V + (\gamma-1) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$; $\Delta W + (\gamma-1) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$, составим уравнения внутренних связей; $2V_{201} + (\gamma-1)U_{111} = 0$; $-2V_{201} + (\gamma-1)U_{111} = 0$, откуда $U_{111} = 0$; $V_{201} = 0$.

Уравнения поверхностных связей получаем из условия закручивания части рамы длиной l на угол φ : $V_{101} = \varphi/l$.

После исключения зависимых компонент упругих перемещений, ряды упругих перемещений принимают вид: $U = yzU_{011}$; $V = \varphi/lxz$; $W = -\varphi/lxy$.

Из условия минимума потенциальной энергии при упругой деформации $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$ (2) составляем вариационные уравнения равновесия рамы. Таких

вариационных уравнений столько, сколько независимых обобщенных перемещений входит в выражение потенциальной энергии Π системы. Для рассматриваемого случая $q = U_{011}$.

Подставив значения компонент тензора деформаций и напряжений в формулу потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{G}{2} \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz,$$

получаем:

$$\Pi = \frac{G}{2} \iiint_V [z^2 (U_{011} + \frac{\varphi}{l})^2 + y^2 (U_{011} - \frac{\varphi}{l})^2] dx dy dz.$$

После подстановки значения Π в формулу (2) получаем следующее вариационное уравнение равновесия части рамы, подвергаемой кручению:

$$(U_{011} + \frac{\varphi}{l}) \iiint_V z^2 dx dy dz + (U_{011} - \frac{\varphi}{l}) \iiint_V y^2 dx dy dz.$$

Значения интегралов типа $\iiint_V x^m y^n z^p dx dy dz$ по всему объему конст-

рукции, подвергаемой деформации, вычисляем с помощью ЭВМ ЕС-1022. Для этого деформируемую часть конструкции разбиваем на 90 элементов.

Для рассматриваемого случая $\iiint_V z^2 dx dy dz = 5,278700 \times 10^7 \text{ см}^5$;

$$\iiint_V y^2 dx dy dz = 1,132323 \times 10^7 \text{ см}^5.$$

При угле закручивания $\varphi = \pi/45$ рад участка конструкции длиной $l = 513 \text{ см}$ $\varphi/l = 1,361 \cdot 10^{-4}$ рад/см.

Решив вариационное уравнение равновесия относительно U_{011} , получаем: $U_{011} = -8,802 \cdot 10^{-5}$ рад/см; $V_{101} = 1,361 \cdot 10^{-4}$ рад/см;

При решении поставленной задачи имеем: $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 0$; $\sigma_z = 0$; $\tau_{xy} = Gz(U_{011} + V_{101})$; $\tau_{yz} = 0$; $\tau_{xz} = Gy(U_{011} - V_{101})$.

Используя значения U_{011} и V_{101} , находим компоненты касательных напряжений: $\tau_{xy} = -3,84z$ МПа; $\tau_{xz} = -17,92y$ МПа.

Максимальные касательные напряжения получим, подставив максимальные значения $y = 10$ см и $z = 43$ см для рассматриваемой конструкции: $\tau_{xy} = -165,39$ МПа; $\tau_{xz} = -179,2$ МПа. Следовательно, решающим фактором разрушения рамы автомобиля являются касательные напряжения, а не нормальные, как предполагают многие исследователи. Отметим, что полученные результаты приближительны. Для их уточнения необходимо использовать ряды упругих перемещений более высоких степеней, что даст возможность уточнить значения касательных напряжений и получить компоненты нормальных напряжений. Полученные результаты можно использовать для расчета заклепочных соединений рам автомобилей и прицепов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Минск, 1967. — 224 с.

УДК 621.791:541.65

Н.Н.БУТКЕВИЧ, канд. техн. наук (БПИ)

ОБРАЗОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОПТИЧЕСКИ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ТЕРМОРЕАКТИВНЫХ ПОЛИМЕРАХ

Термореактивные полимеры являются хорошим материалом для изучения напряженно-деформированного состояния объемных тел при механическом нагружении. Для этого используют метод "замораживания" деформаций и считают, что при охлаждении материала, начиная от температуры "замораживания", после снятия нагрузки и разрезания испытуемого образца на темплеты напряженно-деформированное состояние полностью сохраняется (фиксируется).

Свойство оптически-чувствительных полимеров "замораживать" деформации проявляется не только при механическом нагружении, но и при воздействии температурных полей. Напряжения, фиксируемые в полимере, который подвергается температурному воздействию, называются температурными. Они могут быть различного происхождения: усадочные, образованные в конструкциях из элементов, изготовленных из материалов с разными коэффициентами теплового расширения; напряжения в телах с многосвязными контурами поперечного сечения; нестационарные температурные напряжения и т.д. Температурные напряжения в моделях из оптически чувствительных материалов