

Подставим эти усилия в формулу (9) и после некоторых преобразований вычислим в ней интеграл. Получим:

$$h(r) = h_0 \frac{r}{R} \left| \frac{Rq(1-\nu^-) - (1+\nu^-) 2T_s^0}{2[Rq - (1+\nu^-) T_s^0]} \right| \left| \frac{r^2 - B}{r^2} \right| \times \\ \times \left| \frac{r}{R} \right| \left| \frac{E^-}{E^+} \nu^+ + \frac{A}{B} \right| \left| \frac{r^2 - B}{R^2 - B} \right| \left| \frac{B-A}{2B} \right|^{CD}; \quad (11)$$

$$A = \frac{R^3 q}{Rq + 2T_s^0}; B = \frac{R^3 q(1+\nu^-)}{Rq(1-\nu^-) - (1+\nu^-) 2T_s^0}; C = \frac{Rq + 2T_s^0}{(1-\nu^-) Rq - (1+\nu^-) 2T_s^0};$$

$$D = - \frac{E^-}{E^+} \nu^+ \left(\frac{1}{\nu^+} - \nu^- \right).$$

Формула (11) применяется только в областях, где выполняются условия: а) $T_s^+ T_s^- < 0$ и б) $|h(r)/r| \leq 1/10$. Подставляя выражения (10) и (11) в эти неравенства и решая их совместно, определим, что толщина полусферической разномодульной оболочки вычисляется по формуле (11) при $q = \text{const} > 0$ в случае, если исходные силовые механические и геометрические параметры удовлетворяют условию $T_s^0 > Rq/(1+\nu^-)$, $R^2 > r^2 > R^3 q / (2T_s^0 - Rq)$.

ЛИТЕРАТУРА

- Исабебян Н.Г. Безмоментная теория оболочек, изготовленных из анизотропного разномодульного материала. — Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1969, т. 22, № 6, с. 22–37.
- Мартыненко М.Д. Определение безмоментной формы оболочки под действием заданной внешней нагрузки. — В сб.: Вопросы математической физики и теории функций. Киев, 1964, с. 91–96.
- Мартыненко М.Д. Об одной задаче безмоментной теории оболочек вращения, находящихся в температурном поле. — Докл. АН БССР, 1972, т. 16, № 6, с. 499–501.
- Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. — М., 1966. — 384 с.

УДК 539.3

А.Е. КРУШЕВСКИЙ, канд. техн. наук,
Н.Я. ЛУЦКО (БПИ)

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА И ПАКЕТА ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ЭВМ

На базе численных и аналитических вариационных методов расчета конструкций создаются универсальные алгоритмы и программы реализации их на ЭВМ, например, программа на основе метода конечных элементов "Прочность" (Киевский инженерно-строительный институт), программы на основе модифицированного метода Трефтца (БПИ) [1].

В настоящей статье используется вариационный принцип Лагранжа для построения алгоритма и пакета программ для решения задач осесимметричной теории упругости в цилиндрических координатах на ЭВМ. В качестве тестового примера приводится расчет цилиндрической оболочки под действием нормальной неравномерной нагрузки. Дается сравнение различных подходов в построении уравнений поверхностных связей. В предлагаемом алгоритме решение задачи строится в виде степенных рядов

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=0} \sum_{n=0} U_{mn} r^m z^n; \\ w &= \sum_{m_1=0} \sum_{n_1=0} W_{m_1 n_1} r^{m_1} z^{n_1}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где U_{mn} и $W_{m_1 n_1}$ – неизвестные обобщенные перемещения.

Допускаются любые комбинации четности и нечетности показателей степеней при r и z . Выбранные степенные ряды (1) должны удовлетворять уравнениям Ляме, которые в цилиндрических координатах для осесимметричной задачи без учета объемной и температурной нагрузок имеют вид [2]:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2G) r \frac{\partial \theta}{\partial r} + 2G \frac{\partial}{\partial z} (r \omega_\beta) &= 0; \\ (\lambda + 2G) r \frac{\partial \theta}{\partial z} - 2G \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\beta) &= 0; \\ \theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{dw}{dz}; \quad \omega_\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где λ и G – коэффициенты Ляме.

Подставляя выражения (1) в уравнения (2) и приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $r^m z^n$, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) внутренних связей:

$$\begin{aligned} A_1^{0n} U_{0n} &= 0; \quad m = 0; \quad n = \overline{0, NM}; \\ A_1^{mn} U_{mn} + A_3^{mn} W_{m-1, n+1} + A_4^{mn} U_{m-2, n+2} &= 0; \quad m = \overline{2, NM}; \quad n = \overline{0, NM-m}; \\ A_9^{0n} U_{0n} + A_{11}^{0n} W_{1, n-1} &= 0; \quad m = 0; \quad n = \overline{1, NM}; \\ A_9^{mn} U_{mn} + A_{11}^{mn} W_{m+1, n-1} + A_{12}^{mn} W_{m-1, n+1} &= 0; \quad m = \overline{1, NM}; \\ n &= \overline{1, NM-m}, \end{aligned}$$

$$\text{где } A_1^{mn} = (\lambda + 2G) (m+1) (m-1); \quad A_3^{mn} = (\lambda + G) (m-1) (n+1);$$

$$A_4^{mn} = G (n+2) (n+1); \quad A_9^{mn} = (\lambda + G) (m+1) n;$$

$$A_{11}^{mn} = G (m+1)^2; \quad A_{12}^{mn} = (\lambda + 2G) n (n+1).$$

Для уточнения решения в определенных точках упругого тела в алгоритм включаются уравнения поверхностных связей. Это проявляется в задании перемещений и напряжений в некоторых конкретных точках, а также в выполне-

нии интегральных условий равновесия на поверхности. Совокупность уравнений внутренних и поверхностных связей дают СПАУ вида

$$Ab = \vec{c} \quad (3)$$

с матрицей A размерности

$$(\dim) n_4 \times n_3,$$

где n_4 – общее число уравнений связей; n_3 – количество обобщенных перемещений ($n_4 < n_3$) и столбцов свободных членов $\vec{c} \dim n_4$.

Полученная система (3) методом Жордана с выбором максимального элемента по строке преобразуется к виду, $E|A_2 = \vec{b}_1 | \vec{b}_2 = \vec{c}_1$, что позволяет выразить n_4 обобщенных перемещений, составляющих вектор b_1 , через оставшиеся (вектор \vec{b}_2):

$$\vec{b}_1 = \vec{c}_1 - A_2 \vec{b}_2. \quad (4)$$

Итак, остается найти $n_3 - n_4$ обобщенных перемещений, входящих в вектор \vec{b}_2 . Для их определения используется принцип минимума потенциальной энергии системы. Предварительно необходимо перестроить функционал

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V (e_r \sigma_r + e_{rz} \tau_{rz} + e_z \sigma_z + e_\varphi \sigma_\varphi) dv - \iint_S \vec{F} \vec{u} ds,$$

являющийся функцией n_3 переменных $b_1(1), \dots, b_1(n_4); b_2(1), \dots, b_2(n_3 - n_4)$, к виду $\overline{\Pi}(b_2(1), \dots, b_2(n_3 - n_4))$ с учетом формулы (4). Тогда задача нахождения неизвестных обобщенных перемещений сведется к отысканию точек экстремума функции $\overline{\Pi}(n_3 - n_4)$ аргументов. Таковыми являются, как известно, точки, удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial b_2(i)} = 0; \quad i = \overline{1, n_3 - n_4}. \quad (5)$$

Дальнейший ход алгоритма прослеживается без труда: 1) решение СПАУ (5), позволяющее определить часть обобщенных перемещений; 2) нахождение по формуле (4) остальных неизвестных; 3) вычисление по формуле (1) перемещений и напряжений по закону Гука в любой точке тела.

Предлагаемый алгоритм реализуется с помощью пакета программ, содержащих 18 программных единиц, объединенных в 10 модулей (рис. 1). Входной информацией являются геометрические данные и характеристики материала рассчитываемой детали, координаты точек, в которых накладываются поверхностные связи и вычисляются напряжения и перемещения. Процесс полностью автоматизирован. Результат работы – печать степенных рядов (1), таблиц напряжений, значений функционала энергии. Построенные программы можно использовать для решения любой осесимметричной задачи теории упругости. При переходе от одной задачи к другой кроме входных данных изменения требуют три программы: *BASE*, формирующую ряды аппроксимирующих функций; *V*, вычисляющую интеграл по объему, и *SVOB2*, определяющую по формуле (5) частную производную от потенциала поверхностных сил.

Проверка работоспособности пакета осуществлена для задачи о равновесии втулки (рис. 2) под действием радиальной линейной нагрузки, приложенной на внутренней поверхности. В плоскости $z = 0$ отсутствуют осевые переме-



Рис. 1. Принципиальная схема пакета программ для расчета напряжений в осесимметричных задачах теории упругости

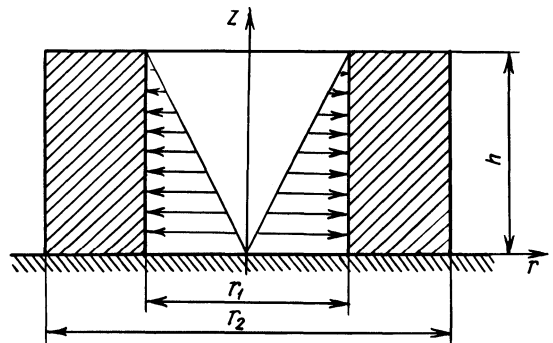


Рис. 2. Равновесие втулки под действием радиальной неравномерной нагрузки

щения ($w = 0$) и касательные напряжения $\tau_{rz} = 0$. Остальная поверхность свободна от напряжений. При расчете были взяты следующие размеры: $r_1 = 0,5$ см; $r_2 = 1$ см; $h = 1$ см. Решение задачи строилось в виде степенных рядов:

$$u = \sum_{m=0} \sum_{n=0} U_{2m+1, n} r^{2m+1} z^n;$$

$$w = \sum_{m_1=0} \sum_{n_1=0} W_{2m_1, n_1+1} r^{2m_1} z^{n_1+1}.$$

В исследованиях ставились два вопроса: 1) влияние увеличения степени приближения на точность решения; 2) зависимость выполнения краевых условий от вида наложения поверхностных связей.

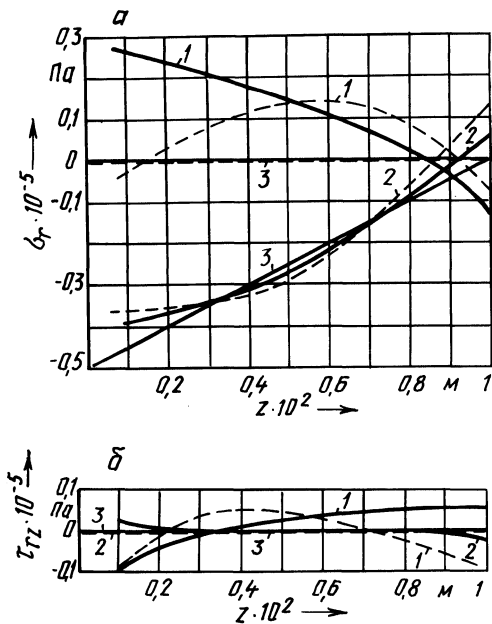


Рис. 3. График нормальных σ_r (а) и касательных τ_{rz} (б) напряжений при $NM = 5$ на участках поверхности $r = 1; 0 < z < 1$ (пунктир) и $r = 0,5; 0 < z < 1$ (сплошная линия): 1 — без задания поверхностных связей; 2 — с заданием напряжений в точках $x = 0,5; y = 0,3$ и $x = 0,5; y = 0,7$; 3 — заданные напряжения

Результаты, полученные при задании напряжений в точках $x = 0,5; y = 0,3$ и $x = 0,5; y = 0,7$ для $NM = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и в точках $x = 0,5; y = 0,3; x = 0,5; y = 0,7$ и $x = 1; y = 0,5$ при $NM = 5, 6, 7, 8$ показали, что наиболее близкие решения получаются при $NM = 5, 6$ (эпюры напряжений для этих двух степеней почти полностью совпадают). Однако выполнение краевых условий в рассматриваемом случае при точечном задании напряжений нельзя считать удовлетворительным, так как слишком велика разница между полученными напряжениями и заданными на поверхности. При более высоких степенях приближения ($NM = 7, 8$) решение теряет устойчивость.

Ответ на второй вопрос дали 11 вариантов заданий условий на поверхности. Их анализ позволил сделать основной вывод: наложение связей на нагруженных участках поверхности улучшает (рис. 3), а на участках поверх-

ности, свободных от напряжений, ухудшает сходимость приближенного решения к точному (рис. 4), что характеризуется увеличением средней квадратической погрешности выполнения краевых условий. Наилучший результат

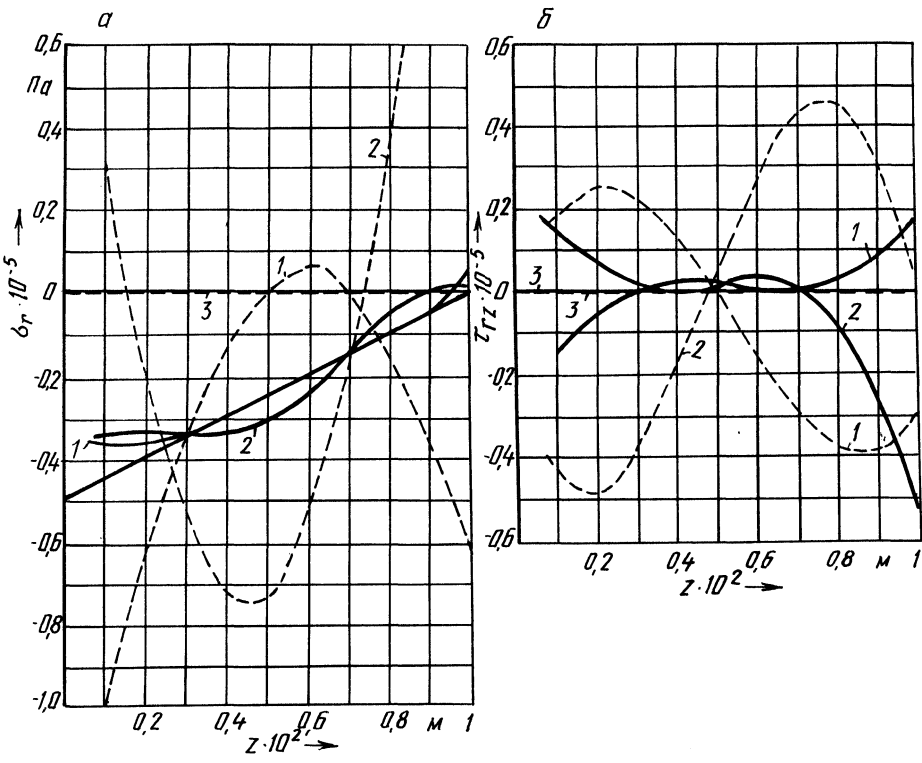


Рис. 4. Графики нормальных σ_r (а) и касательных τ_{rz} (б) напряжений при $NM = 5$ на участках поверхности $r=1, 0 < z < 1$ (пунктир) и $i=rz=0,5, 0 < z < 1$ (сплошная линия) в случае задания их в точках: 1 - $x = 0,5; y = 0,3; x = 0,5; y = 0,7; x = 1; y = 0,5$; 2 - $x = 0,5; y = 0,3; x = 0,5; y = 0,7$; 3 - заданные напряжения

при оценке по этому критерию получается в случае задания интегральных условий вида:

$$\int_0^{0,5} \sigma_r |_{r=0,5} dz = -0,1875; \quad \int_{0,5}^1 \sigma_r |_{r=0,5} dz = -0,0625;$$

$$\int_0^1 \tau_{rz} |_{r=0,5} dz = 0.$$

Графики напряжений приведены на рис. 5. Таким образом, численный анализ различных подходов к построению

уравнений поверхностных связей на рассмотренном примере расчета цилиндрической оболочки показывает, что

1) точечные поверхностные связи на любых участках поверхности улучшают решение в окрестности выбранных точек и ухудшают в других (под участком поверхности понимается ее часть с непрерывной нормалью);

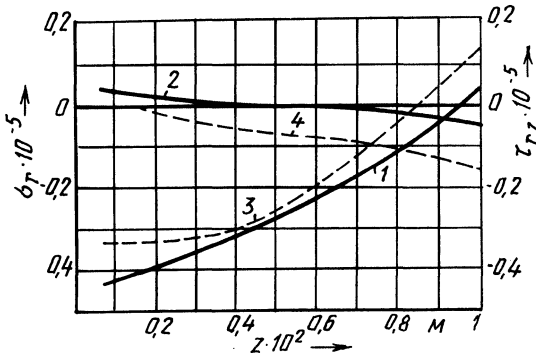


Рис. 5. Графики нормальных σ_r (кривые 1, 3) и касательных τ_{rz} (кривые 2, 4) напряжений при $NM = 5$ на участках поверхности $r = 0,5$, $0 < z < 1$ (сплошная линия) и $r = 1$, $0 < z < 1$ (пунктир)

- 2) интегральные условия хотя и не выполняют точно поверхностные условия в отдельных точках, но обеспечивают достаточно малую невязку выполнения поверхностных условий на участке интегрирования;
- 3) на участках поверхности, свободных от нагрузки, не следует заранее выполнять краевые условия (ни точно, ни интегрально);
- 4) на нагруженных участках поверхности следует заранее выполнять краевые условия для всех напряжений в интегральном или другом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В.Ф., Крушевский А.Е. Некоторые вопросы расчета корпусных деталей машин на основе методов аналитической механики с применением ЭВМ. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1973, с. 111—120. 2. Ревич В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. — М., 1977. — 227 с.

УДК 539.319

И.Ф.ШИДЛОВСКИЙ (БПИ)

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА К РАСЧЕТУ НА КРУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИЙ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В качестве металлоконструкций из тонкостенных элементов взята рама автомобиля МАЗ-509. При расчете предполагается, что соединение элементов металлоконструкции жесткое и ее боковая поверхность свободна от внешних