УДК 539.3

В.А.ИБРАГИМОВ, д-р физ.-мат. наук,
В.А.НИФАГИН (БПИ)

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ НАГРУЖЕНИЯ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ ТЕЛ

1. Известно, что анализ напряженно-деформированного упругопластического состояния значительно более сложная в математическом плане задача, чем аналогичные задачи линейной упругости. К числу основных осложняющих факторов относятся нелинейность диаграммы деформирования материала в зоне активного нагружения, возникновение зон упругой разгрузки, границы разделов которых неизвестны, и, наконец, инкрементальный (неголономный) характер определяющих соотношений теорий пластичности. Последний фактор является наиболее существенным, поскольку исключает при сложных траекториях нагружения возможность формулировки краевой задачи непосредственно для конечных значений внешних усилий и перемещений. Поэтому все немногочисленные известные решения краевых задач для упрочняющихся тел были получены численно в рамках шагового метода [1], предполагающего прослеживание развития пластических зон в теле на основе последовательного наращивания параметра нагружения посредством достаточно малого изменения его.

Несмотря на универсальность, указанный метод может вызывать возражения в отношении его эффективности для весьма обширного класса задач теории пластичности. Ограничиваясь в дальнейшем предположением отсутствия в теле зон разгрузки, отметим, что использование шагового метода предполагает решение большого числа вспомогательных шаговых задач (осложненных в общем случае наличием анизотропии и неоднородности упругих модулей) и тем самым удержание ("несократимость") параметра нагружения как дополнительной независимой переменной в краевой задаче. В то же время для многих практически важных случаев траектории нагружения во всех точках упругопластического тела оказываются достаточно гладкими и не слишком отличающимися от лучевого нагружения. Последнее привело к широкому использованию в расчетной практике соотношений теории малых упругопластических деформаций, в которых история нагружения вообще исключается из рассмотрения. Достаточные условия применимости этой теории определяются известной теоремой А.А.Ильюшина [1], но являются существенно более узкими, чем рамки практической потребности; имеющиеся в сравнимых случаях результаты обнаруживают расхождения с аналогичными в рамках теорий течения. Поэтому отказ от более общих теорий приращения деформаций в пользу деформационных теорий вряд ли следует признать универсальным способом аппаратных трудностей.

В связи с этим представляется целесообразной разработка методов, занимающих в указанном смысле промежуточное положение и ориентированных на неголономность определяющих соотношений теории пластичности с одновременным учетом специфики реализуемых законов нагружения посредством введения некоторых специальных представлений для напряжений и деформаций по параметру нагружения.

Впервые вариант такого подхода, названный методом разложения по параметру нагружения, был предложен В.Д.Клюшниковым на примере теории течения материала с изотропным упрочнением [1] (здесь и далее приняты обозначения этой книги) :

$$de_{ij} = ds_{ij} + dF(T)s_{ij}, \; dT \geqslant 0 (i, j = 1, 2, 3) , \tag{1}$$

где e_{ij}, s_{ij} — девиаторы тензоров деформаций и напряжений; $T^2 = 1/2 s_{ij} s_{ij}$; $F(T)$ — функция упрочнения (выбираемая далее в виде $F = AT^2$) ; напряжения отнесены к удвоенному модулю упругого сдвига.

Отсылая для подробного ознакомления к работе [1], ограничимся в наших целях лишь основными положениями метода. Предполагая, что поверхностные и массовые силы зависят от растущего параметра нагружения λ,

$$T_i = \sum_{k=1} T_i^{(k)} \lambda^k \; ; F_i = \sum_{k=1} F_i^{(k)} \lambda^k , \tag{2}$$

будем искать решение краевой задачи в виде

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1} \sigma_{ij}^{(k)} \lambda^k ; \; \epsilon_{ij} = \sum_{k=1} \epsilon_{ij}^{(k)} \lambda^k , \tag{3}$$

где тензоры, отмеченные индексами, зависят лишь от координат. Вычисляя $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{mm} \sigma_{ij}$, $e_{ij} = \epsilon_{ij} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = 0)$ и внося их в формулу (1), находим:

$$e_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} + R_{ij}^{(k)} \; (k = 1, 2, ...) , \tag{4}$$

где

$$\left. \begin{aligned} & R_{ij}^{(1)} = 0; \; R_{ij}^{(2)} = 0; \; R_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{k-1} nAa_n s_{ij}^{(k-n)} ; \\ & s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \frac{1}{3} \sigma_{mm}^{(k)} \sigma_{ij} ; \; a_n = \sum_{m=1}^{n-1} s_{ij}^{(m)} s_{ij}^{(n-m)} ; \\ & e_{ij}^{(k)} = \epsilon_{ij}^{(k)} . \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Согласно соотношениям (3), тензоры $\sigma_{ij}^{(k)}$, $\epsilon_{ij}^{(k)}$ должны удовлетворять обычным уравнениям равновесия и совместности деформаций. Из формул (5) видно, что величины $R_{ij}^{(k)}$ определяются через решения с индексами, меньшими k. Уравнения (4) при этом равносильны закону Гука с известными дополнительными слагаемыми $R_{ij}^{(k)}$. Поэтому возможен метод последовательного отыскания $\sigma_{ij}^{(k)}$ в рамках линейных задач с известными добавочными силами, начиная с обычных однородных задач с индексами $k = 1, 2$. Соответствующие краевые условия при этом очевидны, например $\sigma_{ij}^{(k)} n_j = T_i^{(k)}$ для k-приближения.

Ниже рассмотрим на простых примерах особенности метода.

2. Пусть бесконечный прямоугольный в плане $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1$ цилиндрический стержень подвергнут двухосному сдвигу усилиями $T_1 = a_1\lambda$, $T_2 = a_2\lambda$, заданными на боковых гранях $|x_1| = 1$, $|x_2| = 1$ соответственно. Параметр λ монотонно возрастает $(\lambda \geqslant 0)$.

Обозначая через e_{3i}, σ_{3i} сдвиговые компоненты деформаций и напряжений и принимая для них формулы (3), находим из соотношений (2) — (5) при $k = 1, 2, 3$:

$$\left.\begin{aligned} & e_{3i}^{(1)} = \sigma_{3i}^{(1)};\ e_{3i}^{(2)} = \sigma_{3i}^{(2)};\\ & e_{3i}^{(3)} = \sigma_{3i}^{(3)} + \frac{2}{3} A((\sigma_{31}^{(1)})^2 + (\sigma_{32}^{(1)})^2)\,\sigma_{3i}^{(1)} \quad (i = 1, 2). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

С учетом уравнений равновесия $\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0$ и совместности деформаций $e_{31,2} - e_{32,1} = 0$ величины (6) можно принять постоянными. Из краевых условий $\sigma_{31} = T_1$ $(|x_1| = 1)$, $\sigma_{32} = T_2$ $(|x_2| = 1)$ следует, что $\sigma_{31}^{(1)} = a_1$, $\sigma_{32}^{(1)} = a_2$, $\sigma_{31}^{(k)} = \sigma_{32}^{(k)} = 0$ $(k = 2, 3)$, поэтому, согласно уравнениям (6), имеем: $e_{3i}^{(3)} = (2A/3)\,(a_1^2 + a_2^2)\,a_i$. Из последующих соотношений (5) нетрудно увитеть, что $\sigma_{3i}^{(k)} = e_{3i}^{(k)} = 0$ $(k = 4, 5, \ldots)$. Поэтому решение $\sigma_{3i} = a_i\lambda$; $e_{3i} = a_i\lambda + \frac{2}{3} A\,(a_1^2 + a_2^2)\,a_i\,\lambda^3$ $(i = 1, 2)$ для любого конечного значения усилий T_1, T_2 является точным и получено с помощью лишь трех вспомогательных задач, тогда как формальный шаговый метод потребовал бы существенно большего их числа (лимитируемого снизу точностью интегрирования соотношений (1)).

3. Рассмотрим задачу о равномерном растяжении несжимаемого тела с круговым отверстием в условиях плоской деформации. Обозначая через $S = (\sigma_{22} - \sigma_{11})/2 + i\sigma_{12}$, $2\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$, $Э = \epsilon_{22} + i\epsilon_{12}$ комплексные комбинации напряжений и деформаций, примем для них разложения (3) вида

$$S = \sum_{k=1} S_k \lambda^k;\quad Э = \sum_{k=1} Э_k \lambda^k;\quad \sigma = \sum_{k=1} \sigma_k \lambda^k, \tag{7}$$

где S_k, $Э_k$, σ_k — соответствующие комбинации координатных величин.

Внося представления (7) в уравнения равновесия и совместности деформаций $\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial \bar z}$, $\frac{\partial^2 Э}{\partial \bar z^2} + \frac{\partial^2 \bar Э}{\partial z^2} = 0$ $(z = x_1 + i x_2)$ и учитывая соотношения (4), после интегрирования получим

$$\left.\begin{aligned} &S_k = \Phi_k'(z)\bar{z} + \Psi_k(z) + F_k(z,\bar{z});\ \sigma_k = \Phi_k + \bar{\Phi}_k + H_k(z,\bar{z}); \\ &F_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial z} + \int \frac{\partial^2 \bar{Q}_k}{\partial z^2} d\bar{z}\right);\ H_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{Q}_k}{\partial z}\right); \\ &Q_k = \int R_k dz, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

где Φ_k, Ψ_k — комплексные потенциалы; $R_k = R_{22}^{(k)} + iR_{12}^{(k)}$.

Краевые условия на свободной от усилий окружности $|z| = 1$ и на бесконечности запишутся ($\varphi = \arg z$):

$$\sigma - Se^{2i\varphi} = 0\ (|z| = 1);\ \sigma_{11}, \sigma_{22} \to \lambda;\ \sigma_{12} \to 0\ (z \to \infty). \quad (9)$$

С помощью формул (7), (8) преобразуем условия (9):

$$\Phi_k + \bar{\Phi}_k - (\Phi_k'\bar{z} + \Psi_k)e^{2i\varphi} = F_k e^{2i\varphi} - H_k\ (|z| = 1); \quad (10)$$

$$\Phi_1 \to 1/2;\ \Psi_1 \to 0;\ \Phi_k;\ \Psi_k \to 0\ (z \to \infty). \quad (11)$$

При $k = 1, 2$ $F_k = H_k = 0$, поэтому решения краевых задач (10), (11) известны [2]:

$$\Phi_1(z) = 1/2;\ \Psi_1(z) = 1/z^2;\ \Phi_2(z) = \Psi_2(z) = 0. \quad (12)$$

Вычисляя по формулам (8) правую часть в равенстве (10) при $k = 3$, получим краевую задачу для потенциалов Φ_3, Ψ_3. Ее решение без труда отыскивается методом рядов:

$$\Phi_3(z) = 0;\ \Psi_3(z) = -4A/(9z^2). \quad (13)$$

Для четвертого приближения при вычислении правой части в равенстве (10) величины F_3, H_3 равны нулю, поэтому однородная задача (10), (11) для Φ_4, Ψ_4 имеет тривиальное решение.

Пятое приближение отыскивается аналогично, с использованием формул (8), (10), (11). Ограничимся указанием результата:

$$\Phi_5(z) = 0;\ \Psi_5(z) = 8A^2/(9z^2). \quad (14)$$

Приближенные значения напряжений легко могут быть найдены теперь по формулам (8), (11)—(14) и

$$S = S_1\lambda + S_3\lambda^3 + S_5\lambda^5;\ \sigma = \sigma_1\lambda + \sigma_3\lambda^3 + \sigma_5\lambda^5.$$

Аналогично могут быть найдены и следующие члены разложений (3). Поэтому приближенное решение задачи может быть получено с любой заданной степенью точности в аналитическом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. К л ю ш н и к о в В.Д. Математическая теория пластичности. — М., 1979. — 208 с.
2. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М., 1966. — 707 с.

УДК 539.4:678.067.5

В.П.СТАВРОВ, д-р техн. наук (ГПИ)

О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ПРОЧНОСТИ СТЕКЛОВОЛОКНИТОВ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ МАКРОСТРУКТУРЫ

Для управления структурой стекловолокнитов в изделиях с целью создания оптимальных конструкций необходимо определить соотношения, позволяющие рассчитать упругие характеристики и прочность материала в изделии [1], [2]. Прогнозирование прочности стекловолокнитов (в общем случае — построение предельной поверхности) представляет собой более сложную задачу, чем прогнозирование их упругих свойств. Это объясняется тем, что не только напряжения в элементе, но и его прочностные свойства зависят от его ориентации. Для построения предельной поверхности необходимо знать законы распределения прочностных характеристик элементов и напряжений в них. Кроме того, необходимо задать функцию поврежденности, определяющую вероятность локальных повреждений (разрушения элементов), которая соответствует макроскопическому разрушению при данном напряженном состоянии.

Особенность стекловолокнитов состоит в том, что как действующие, так и разрушающие напряжения в элементах структуры являются случайными величинами.

В статистической теории прочности обычно либо действующие, либо предельные напряжения предполагаются детерминированными [3]. В некоторых вариантах статистической теории пластичности и прочности выводятся макроскопические условия пластичности и разрушения для сред с элементами, имеющими детерминированные свойства, но ориентированными случайным образом в пространстве. Ниже излагается метод прогнозирования прочности стекловолокнитов, позволяющий одновременно учесть случайный характер ориентации элементов структуры и их неоднородность.

Макроструктуру стекловолокнитов составляют пучки нитей, прядей, пропитанных связующим [1]. Допустим, ориентация макроэлементов в пространстве задана плотностью распределения $f_{\theta,\varphi,\psi}(u, v, t)$ углов Эйлера (θ, φ, ψ), определяющих положение системы координат x'_1, x'_2, x'_3, связанной с элементом (ось x'_3 направлена вдоль нитей), по отношению к системе координат (x_1, x_2, x_3), связанной с изделием. Разрушающее напряжение для элемента структуры зависит от угла между направлениями элемента (осью x'_3) и напряжения.

Ограничимся рассмотрением случаев, когда растяжение-сжатие происходит вдоль одной из осей симметрии структуры (x_1, x_2 или x_3). Согласно