воздействию однородного поля растягивающих напряжений от нагрузки p, направленной параллельно оси Ox, и равномерному нагреву до температуры T_0, то на основании соотношений (1), (2) на границе раздела сред вне трещины

$$\sigma_\rho = \frac{e^{-\beta\theta_0}}{(1+m^2-2m\cos 2\theta)\sqrt{\left|\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}\right|}}\,[(s_1\cos\psi -$$

$$- s_2\sin\psi)(1-m\cos 2\theta) - m(s_1\sin\psi + s_2\cos\psi)\sin 2\theta],$$

где

$$s_1 = \left(\frac{p}{4} - G_0\right)(\cos\theta - \cos\theta_0 - 2\beta\sin\theta_0) - e^{-2\beta\theta_0}\left(\frac{p}{4}m - \frac{p}{2} +\right.$$

$$\left. + mG_0\right)(\cos\theta + \cos 2\theta),$$

$$s_2 = \left[\frac{p}{4} - G_0 + e^{-2\beta\theta_0}\left(\frac{p}{4}m - \frac{p}{2} + mG_0\right)(1+2\cos\theta)\right]\sin\theta,$$

$$\psi = 2\beta\ln 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0}{2}.$$

Для класса композитов, прочность контактного слоя которых относительно невелика, по асимптотике найденных напряжений в окрестности вершины трещины и на основании результатов работ [3, 4] получены условия предельного равновесия для нахождения критических значений нагрузки p^* и температуры T_0^*, по достижении которых трещина начинает распространяться по линии раздела материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск, 1972. – 192 с. 2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966. – 708 с. 3. Бахмат Г.Л., Прусов И.А. О прочности равномерно нагретой кусочно-однородной плоскости, ослабленной трещинами // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 6. – С. 186–188. 4. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М., 1975. – 625 с.

УДК 539.3

Н.П. КАРЕТКО, канд. физ.-мат. наук (БГУ)

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ С РАЗРЕЗОМ ПРИ ЗАДАННОЙ НА БЕРЕГАХ РАЗРЕЗА ТЕМПЕРАТУРЕ

При эксплуатации многих конструкций в материале появляются дефекты типа трещин. Наибольшая опасность разрушения тел возникает в случае нестационарных тепловых режимов. Количество работ, в которых исследовано влияние двухмерных нестационарных температурных полей на термоупругое состояние в телах с трещинами, незначительно [1, 2] .

Ниже рассмотрена нестационарная задача термоупругости в квазистатической постановке для тонкой бесконечной изотропной пластинки с конечным прямолинейным разрезом при заданной на его берегах температуре.

Пусть срединная плоскость пластинки занимает бесконечную область D, представляющую собой плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ за вычетом точек $z = x$ на отрезках $L_k = [a_k, b_k]$ вещественной оси. Совокупность отрезков L_k обозначим $L = L_1 + L_2 + ... + L_n$.

По аналогии с работами [3, 4, 5] получаем формулы для определения термоупругого состояния в области D:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + \alpha_1 T,\\
&\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Omega(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)} + \Psi_0 , \qquad (1)\\
&2\mu \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \kappa\Phi(z) + \Omega(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)} - \Psi_0 ,\\
&2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) + \omega(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi(z)} - \psi_0 ,\\
&X + iY = -i[\varphi(z) - \omega(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi(z)} + \psi_0]_A^B ,\\
&M = \mathrm{Re}\,[\mathrm{X}(z) - z\psi(z) - z\bar z\Phi(z) + U_0 - x\frac{\partial U_0}{\partial x} - y\frac{\partial U_0}{\partial y}]_A^B ,\\
&\Psi_0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial x}, \quad \psi_0 = 2\frac{\partial U_0}{\partial z}, \quad \tau = \frac{kt}{c\rho}, \quad \alpha_1 = -\alpha_0 E.
\end{aligned}
$$

Здесь T – температура, усредненная по толщине пластинки и удовлетворяющая уравнению [5]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \kappa_1^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau} - F ,$$

где

$$\kappa_1^2 = \beta/(k\delta_0) , \quad F = \kappa_1^2 T_c(x, y, \tau) + Q(x, y, \tau)/k ;$$

U_0 – частное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = \alpha_1 T.$$

Будем считать, что на бесконечности ($|z| \to \infty$) компоненты напряжения σ_x^∞, σ_y^∞, τ_{xy}^∞ равны нулю, а функция ψ_0 имеет вид

$$\Psi_0 = \Gamma_0 + d_1'/z + d_1''/\bar z + o(|z|^{-2}) .$$

Тогда на значительном удалении от разрезов

$$
\left.\begin{aligned}
&\Phi(z) = \Gamma' + \gamma_1'/z + o(z^{-2}) ,\\
&\Omega(z) = \Gamma'' + \gamma_1''/z + o(z^{-2}) ,\\
&\Gamma' = B' + iC' ,\quad \Gamma'' = B'' + iC'' ,\ C' = \frac{2\mu\epsilon_\infty}{1+\kappa} ,\\
&C'' = C' + \operatorname{Im}\Gamma_0 ,\ B' = -\frac{\alpha_1 T_\infty}{4} ,\quad B'' = \operatorname{Re}\Gamma_0 - \frac{\alpha_1 T_\infty}{4} ,\\
&\gamma_1 = \frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} ,\ \gamma_1'' = \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)} - \bar{d}_1' + d_1'' .
\end{aligned}\right\} \qquad (2)
$$

Рассмотрим пластинку с одним разрезом длиной $2a$, размещенным на оси Ox симметрично относительно начала координат. Предполагается, что между пластинкой и окружающей средой, температура которой $T_c(x, y, \tau) = 0$, осуществляется теплообмен по закону Ньютона, а на части разреза L ($|x| \leqslant a$) со стороны областей D^+ ($y > 0$) и D^- ($y < 0$) задана температура

$$
T = \begin{cases} T_0(\tau), & x \in L^- ,\\ -T_0(\tau) , & x \in L^+ . \end{cases}
$$

Имеем также начальное условие: $T(x, y, 0) = 0$.

Решение задачи теплопроводности в трансформантах Фурье по x и Лапласа по τ , удовлетворяющее начальному и граничному условиям, а также ограниченное на бесконечности, запишем как

$$
\tilde{T} = -\frac{\bar{T}_0(p)\operatorname{sign} y \cdot \sin\omega a}{\pi\omega} e^{-\sqrt{p+\kappa_1^2+\omega^2}\,|y|} , \qquad (3)
$$

где $\tilde{T} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty T e^{-p\tau - i\omega x} dx d\tau$; $\bar{T}_0(p) = \int\limits_0^\infty T_0(\tau) e^{-p\tau} d\tau$.

Переходя в выражении (3) от трансформант к оригиналам, находим температурное поле

$$
T = \frac{y}{4\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\tau \frac{T_0(\tau-u)}{u^{3/2}} e^{-\kappa_1^2 u - \frac{y^2}{4a}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{u}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{u}}\right)\right] du .
$$

Для случая $T_0(\tau) = T_0 = \mathrm{const}$

$$
T = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{|y|}{2\sqrt{\tau}}}^\infty e^{-s^2 - \frac{\kappa_1^2 y^2}{4s^2}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{(x-a)s}{y}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{(x+a)}{y}\right)\right] ds .
$$

Для отыскания функции ψ_0 находим трансформанты:

$$\widetilde{U}_0 = \frac{\alpha_1 \overline{T}_0(p)\operatorname{sign} y \cdot \sin\omega a}{\pi\omega(p+\kappa_1^2)} e^{-\sqrt{p+\kappa_1^2+\omega^2}\,|y|},$$

$$\widetilde{\Psi}_0 = \frac{\alpha_1 \overline{T}(p)(\omega \operatorname{sign} y - \sqrt{p+\kappa_1^2+\omega^2})\sin\omega a}{\pi(p+\kappa_1^2)} e^{-\sqrt{p+\kappa_1^2+\omega^2}\,|y|}. \quad (4)$$

Выполняя обратные преобразования Фурье и Лапласа для выражения (4), получаем

$$\Psi_0 = \frac{i\alpha_1}{\pi}\int_0^\tau T_0(\tau-u)\,e^{-\kappa_1^2 u}\Big\{e^{-\frac{y^2+(x-a)^2}{4u}}\Big[\frac{1}{(z-a)^2} +$$

$$+\Big(\frac{x-a}{z-a}-1\Big)\frac{1}{2u}\Big] - \frac{1}{(z-a)^2} - e^{-\frac{y^2+(x+a)^2}{4u}}\Big[\frac{1}{(\bar{z}+a)^2} +$$

$$+\Big(\frac{x+a}{\bar{z}+a}-1\Big)\frac{1}{2u}\Big] + \frac{1}{(z+a)^2}\Big\}du.$$

Предположим, что на краях разреза L^+ ($y \geqslant 0$), L^- ($y \leqslant 0$) и на бесконечности внешняя нагрузка отсутствует. Тогда на основании формулы (1) получаем краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} &(\Phi+\Omega)^+ - (\Phi+\Omega)^- = 0 \ \text{ на } L, \\ &(\Phi-\Omega)^+ + (\Phi-\Omega)^- = -\Psi_{01}(x,\tau) \ \text{ на } L, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где $\Psi_{01}(x,\tau) = \Psi_{01}^- = \Psi_{01}^+ = \Psi_0(x,0,\tau) = \frac{i\alpha_1}{\pi}\int_0^\pi T_0(\tau-u)\,e^{-\kappa_1^2 u} \times$

$$\times \Big[\frac{1}{(x-a)^2}\Big(e^{-\frac{(x-a)^2}{4u}} - 1\Big) - \frac{1}{(x+a)^2}\Big(e^{-\frac{(x+a)^2}{4u}} - 1\Big)\Big]du.$$

Функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, удовлетворяющие условиям (2), (5),

$$\Omega(z) = -\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\Psi_{01}\,dx}{X^+(x)(x-z)},$$

где

$$X(z) = (z^2 - a^2)^{-1/2}.$$

При этом на берегах разреза

$$\sigma_x^- = -\sigma_x^+,$$

$$\sigma_x^+ = \frac{2}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-a}^{a} \frac{\Psi_{02}\sqrt{a^2-t^2}\,dt}{t-x} - \alpha_1 T_0(\tau) ,$$

$$\Psi_{02} = -i\Psi_{01} .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайвась И.В., Кит Г.С. Нестационарная задача термоупругости для пластинки с полубесконечным термоизолированным разрезом // Проблемы прочности. – 1974. – № 6. – С. 72–75. 2. Кит Г.С., Побережный О.В. Нестационарная задача термоупругости для пластинки с трещиной при наличии теплоотдачи с боковых поверхностей // Физ.-хим. механика материалов. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 73–78. 3. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск, 1972. – 198 с. 4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966. – 708 с. 5. Каретко Н.П. Об одной смешанной задаче термоупругости для полубесконечной пластинки // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 1985. – Вып. 12. – С. 45–48.

УДК 539.3

Р.А. РОМАНЧИК (БГУ)

ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

В работе рассматривается решение задачи о контакте двух упругих тел. С помощью итерационной процедуры уточняется граница области контакта. Итерационный поиск основан на условии положительности нормальных напряжений внутри контактной области и равенства их нулю на границе.

Задача формулируется следующим образом. В области D_1 с границей S_1, описывающей первое тело, ищется решение уравнения

$$h_1 \vec{u}_1 = \vec{f}_1 , \quad x \in D_1 \tag{1}$$

при граничных условиях

$$B_1 \vec{u}_1 \mid S_1 \setminus S_c = \varphi_1 , \quad x \in S_1 \setminus S_c ;$$

в области D_2 с границей S_2, описывающей второе тело,

$$L_2 \vec{u}_2 = \vec{f}_2 , \quad x \in D_2 \tag{2}$$

при условии на границе

$$B_2 \vec{u} \mid S_2 \setminus S_c = \varphi_2 , \quad x \in S_2 \setminus S_c .$$

L_1 и L_2 – линейные дифференциальные операторы, используемые в уравнениях равновесия в перемещениях; B_1, B_2 – дифференциальные операторы, задающие напряжения или перемещения на границе.