МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

В.А. ИБРАГИМОВ, д-р физ.-мат. наук,
В.А. НИФАГИН (БПИ)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ С УПРОЧНЕНИЕМ

В работе [1] для анализа напряженно-деформированного состояния упрочняющегося упругопластического тела применялся метод разложения по параметру нагружения [2]. Была решена задача о равномерном растяжении несжимаемого тела с круговым отверстием в условиях плоской деформации.

Существенно бо́льшие технические трудности представляет задача о двухосном растяжении на бесконечности плоскости с круговым отверстием при условии, что полость свободна от усилий.

Сохраняя обозначения работы [3], выпишем комплексные комбинации напряжений и деформаций и их общие разложения:

$$\left.\begin{aligned} &S_{22} = -S_{11} = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2},\ S_{12} = \sigma_{12},\ \sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{2}, \\ &2G\epsilon_{ij} = S_{ij}^{(1)}\lambda + S_{ij}^{(2)}\lambda^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (S_{ij}^{(k)} + R_{ij}^{(k)})\,\lambda^k . \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Пусть также

$$Э = \epsilon_{22} + i\epsilon_{12},\ S = S_{22} + iS_{12},\ S_k = S_{22}^{(k)} + iS_{12}^{(k)},$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r + 2i\sigma_{r\varphi} = (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})\,e^{2i\varphi} = 2(S_{22} + iS_{12})e^{2i\varphi} .$$

Из (1) следует, что

$$2GЭ = S_1\lambda + S_2\lambda^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (S_k + R_k)\,\lambda^k ,$$

где

$$R_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{k-1} \chi_n S_{ij}^{(k-n)},\ R_k = \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{k=1} \chi_n S_{k-n} \quad (k = 3, 4, \ldots),$$

$$\chi_n = n\sum_{a=1} A_{2a} \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_a=n} a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_a},\ a_n = \sum_{m=1}^{n-1} S_{ij}^{(m)} S_{ij}^{(n-m)}.$$

В приведенных выражениях G – модуль сдвига.

Из решения уравнений равновесия и совместности деформаций получим:

$$S_k = \Phi_k'(z)\bar{z} + \psi_k(z) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial z} + \int \frac{\partial^2 \bar{Q}_k}{\partial z^2} d\bar{z}\right), \tag{2}$$

$$\sigma_k = \Phi_k(z) + \bar{\Phi}_k(z) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{Q}_k}{\partial z}\right), \tag{3}$$

$$\sigma_k = \sigma_r^{(k)} - i\sigma_{r\varphi}^{(k)} = \Phi_k(z) + \bar{\Phi}_k(z) - (\Phi_k'(z)\bar{z} + \psi_k(z))e^{2i\varphi} -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{Q}_k}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial z} + \int \frac{\partial^2 \bar{Q}_k}{\partial z^2} d\bar{z}\right)e^{2i\varphi}, \tag{4}$$

где $\Phi_k(z)$, $\psi_k(z)$ – комплексные потенциалы; $Q_k(z) = \int R_k(z)dz, R_k(z) = R_{22}^{(k)} + iR_{12}^{(k)}$ – представление добавочного члена для k-го приближения закона Гука.

Первое приближение получим при $k = 1$. Краевые условия на свободной от усилий границе отверстия (окружности)

$$\sigma_1 + S_1 e^{2i\varphi} = \Phi_1 + \bar{\Phi}_1 - (\Phi_1'\bar{z} + \psi_1)e^{2i\varphi} = T_r(\varphi) + iT_\varphi(\varphi) = 0.$$

При $z \to \infty$ имеем $\sigma_{11} \to \sigma_{11}^\infty \lambda$, $\sigma_{22} \to \sigma_{22}^\infty \lambda$, $\sigma_{12} \to 0$, откуда следует:

$$\frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty}{2} = \lim_{z\to\infty}(\Phi_1(z) + \bar{\Phi}_1(z)),$$

$$\frac{\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty}{2} = \lim_{z\to\infty}(\Phi_1'(z)\bar{z} + \psi_1(z)).$$

Тогда

$$\lim_{z\to\infty}\Phi_1(z) = \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty}{4} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$\lim_{z\to\infty}\psi_1(z) = \frac{\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty}{2} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

С учетом того что на границе отверстия $\bar{z} = 1/z$, $e^{i\varphi} = z$, получим первые члены разложений:

$$\Phi_1(z) = a + b/z^2;\ \psi_1(z) = 2a/z^2 + b(1 + 3/z^4),$$

причем

$$a = \lim_{z\to\infty}\Phi_1(z) = \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty}{4},\quad b = \lim_{z\to\infty}\psi_1(z) = \frac{\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty}{2}.$$

Таким образом,при $k = 1$

$$S_1 = \Phi_1' \bar{z} + \psi_1 = -2b/z^3 \bar{z} + 2a/z^2 + b(1 + 3/z^4) \ ,$$

$$\sigma_1 = \Phi_1 + \bar{\Phi}_1 = 2a + b(1/z^2 + z^2) \ .$$

Аналогично получаем формулы для второго члена разложения $(k = 2)$:

$$R_3 = \frac{4}{3} A_2 S_1^2 \bar{S}_1 \ , \qquad Q_3 = \int R_3 dz \ .$$

При краевых условиях на границе отверстия

$$\Phi_3(z) + \bar{\Phi}_3(z) - (\Phi_3'(z)/z + \psi_3(z))\, z^2 = L_3 \ ,$$

$$L_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_3}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{Q}_3}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_3}{\partial z} + \int \frac{\partial^2 \bar{Q}_3}{\partial z^2} d\bar{z}\right) e^{2i\varphi}$$

и условиях на бесконечности

$$\Phi_3(z) = iC + o(1), \ \psi_3(z) = o(1)$$

окончательно имеем:

$$\Phi_3(z) = \left(\frac{326}{105} b^3 + \frac{136}{15} a^2 b\right) \frac{1}{z^2} + \frac{1406}{35} ab^2 \frac{1}{z^4} - 10b^3 \frac{1}{z^6} \ ,$$

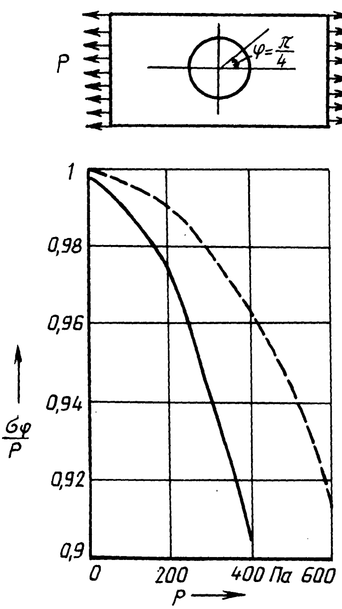

Рис. 1. График зависимости коэффициента концентрации напряжений от внешней нагрузки при $\varphi = \pi/4$

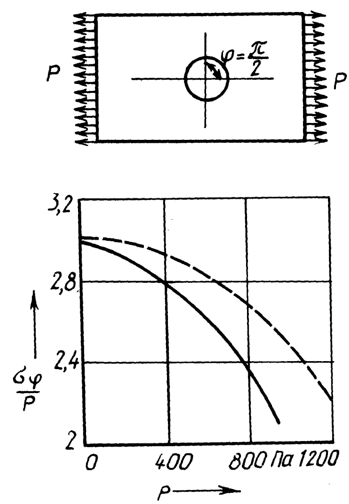

Рис. 2. График зависимости коэффициента концентрации напряжений от внешней нагрузки при $\varphi = \pi/2$

$$\psi_3(z) = \left(\frac{76}{15}ab^2 + \frac{16}{3}a^3\right)\frac{1}{z^2} + \left(-\frac{2748}{35}b^3 + \frac{28}{5}a^2b + \right.$$

$$\left. + 8ab^2\right)\frac{1}{z^4} + \frac{1160}{7}ab^2\frac{1}{z^2} - \frac{172}{5}b^3\frac{1}{z^8}.$$

Результаты расчета тангенциального напряжения σ_φ по формулам (2), (3), (4) при $A_2 = 0{,}016363636$ приводятся на рис. 1, 2 (сплошные линии) для случая одноосного растяжения при $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = \pi/2$ соответственно. Материал — медь с упругими характеристиками: $k = 1{,}37\times 9{,}81\times 10^{10}$ Па; $G = 0{,}46\times 9{,}81\times 10^{10}$ Па, $g_2 = 0{,}18\cdot 10^6$, $\lambda = 0{,}226/9{,}81^2\cdot 10^{-14}$ м^4/Н^2. Для сравнения пунктирными линиями показаны результаты, полученные в работе [3] для физически нелинейного упругого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов В.А., Нифагин В.А. О некоторых методах решения упругопластических задач для упрочняющихся тел // Теоретическая и прикладная механика. — Минск, 1986. — Вып. 13. — С. 3–7. 2. Клюшников В.Д. Математическая теория пластичности. — М., 1979. — 207 с. 3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. — Киев, 1968. — 887 с.

УДК 539.3

И.А. ПРУСОВ, д-р техн. наук,
В.А. САВЕНКОВ (БГУ)

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ

Рассматривается напряженное состояние кусочно-однородной анизотропной плоскости с разрезами на границе раздела однородных сред. Задача сводится к краевой задаче сопряжения, решение которой получено в замкнутой форме.

1. Пусть D_1 $(y > 0)$ и D_2 $(y < 0)$ — верхняя и нижняя полуплоскости, занимаемые различными однородными анизотропными средами. В отсутствие массовых сил уравнения равновесия будут выполняться, если ввести функцию напряжений $U(x, y)$ [1]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \tag{1}$$

$U = U(x, y)$ — произвольная функция, имеющая непрерывные частные производные по x и y до четвертого порядка включительно.

Предположим, что для всех областей D_k $(k = 1,2)$ [2]

$$U = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\left[s_{kj}E_k(z_j) + n_{kj}F_k(\bar{z}_j)\right], \tag{2}$$