

Уравнение (1) соответствует закону сохранения массы; (2) – первому закону термодинамики; (3), (4) – закону сохранения импульса; (5) – является уравнением состояния газа. Дополнив (1)...(5) уравнениями Колмогорова–Прандтля, описывающими турбулентное течение, и граничными условиями процесса, получим замкнутую систему уравнений, полностью описывающих картину течения газа.

Реализация полученной модели была осуществлена численным методом на ЭВМ. Уравнения (1)...(5) дважды интегрировались по координатам z и r , затем подынтегральные выражения аппроксимировались кусочно-гладкими функциями. Таким образом, уравнения (1)...(5) удалось привести к системе нелинейных алгебраических уравнений, которые были решены итерационным методом. Количество итераций зависело от вида выражений вязкости и плотности неьютоновской сжимаемой жидкости и колебалось от 400 до 900. Для случая интенсивного взаимодействия газов (например, горения) сходимость алгоритма обеспечивается введением параметров релаксации, значения которых подбирались опытным путем.

В качестве несущего газа был принят аргон с плотностью $0,068 \text{ кг/м}^3$ и вязкостью $0,137 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Расстояние от плазмотрона до преграды $0,15 \text{ м}$. На рис. 1 приведено распределение температуры в зоне течения. Как и следовало ожидать, с ростом скорости истечения увеличивается зона, температура газа в которой практически постоянна. Этот факт позволяет сделать вывод: для создания устойчивого температурного поля с уменьшением температуры стенки в пределах 10 % от температуры выходящей струи необходимо обеспечить скорость истечения газа $60...70 \text{ м/с}$.

На рис. 2 приведены результаты расчета распределения осевой составляющей скорости (V_z), которые показывают, что в значительной степени падение температуры и скорости в струе газа связаны с захватом окружающего воздуха. При этом образующиеся боковые завихрения при скорости $0,5 \text{ м/с}$ (рис.2.а) значительно превышают аналогичный при скорости 80 м/с (рис. 2, б).

Полученные результаты позволяют выделить параметры, с помощью которых можно управлять процессом истечения: расстояние от плазмотрона до обрабатываемой поверхности, скорость и температура газа на выходе из плазмотрона.

УДК 532.517.4

В.И. КОРОБКО, канд. физ.-мат. наук,
В.К. ШАШМИН (ИПИ)

РАЗВИТИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЗАКРУЧЕННОЙ СТРУИ В СПУТНОМ ОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ

При решении задачи о развитии плоской или осесимметричной струи в спутном потоке используется метод асимптотических разложений в ряд по степеням расстояния от источника струи [1, 2, 7, 8], причем это пригодно не для всей области течения. В данной работе определяются второе и третье при-

движения для осевой скорости и вторые члены асимптотического ряда для движения, тангенциальной составляющей скорости, температуры.

Уравнения турбулентного пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости для осесимметричного движения с закруткой в безграничном спутном однородном потоке той же жидкости в цилиндрической системе координат X, r, θ имеют вид [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v \frac{\partial u_1}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{u'v'}) - \frac{\overline{u'v'}}{r}, \\ u_0 \frac{\partial w}{\partial x} + u_1 \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} (\overline{v'w'}) - 2 \frac{\overline{v'w'}}{r}, \\ \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{w^2}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (ru_1) + \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0, \\ u_0 \frac{\partial \Delta T}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \Delta T}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta T}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} (\overline{T'v'}) - \frac{\overline{T'v'}}{r}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь u_0 — постоянная скорость спутного потока; $u_1, P, \Delta T$ — избыточные продольная скорость, давление и температура; v, w — радиальная и тангенциальная составляющие скорости; x — расстояние вдоль струи; r — расстояние от оси струи; u', v', w', T' — пульсации соответствующих величин в струе. Согласно теории свободной турбулентности Прандтля считаем, что компоненты тензора турбулентных напряжений пропорциональны соответствующим компонентам тензора осредненных скоростей деформаций

$$\overline{u'v'} = \epsilon \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \overline{v'w'} = \epsilon \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right), \quad \overline{T'v'} = \epsilon_r \left(\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{T}{r} \right),$$

где ϵ, ϵ_r — коэффициенты турбулентной вязкости и турбулентного переноса соответственно, причем $Pr_t = \epsilon/\epsilon_r$.

Выпишем зависимости для этих величин [1]:

$$\epsilon = kx^{-1/3}, \quad \epsilon_r = k_1 x^{-1/3}, \quad (2)$$

где k, k_1 — эмпирические константы.

Граничные условия:

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial r} = 0, \quad v = w = 0 \quad \text{при } r = 0;$$

$$u_1 \rightarrow 0, \quad P \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 0, \quad \Delta T \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Условия в интегральной форме отражают законы сохранения количества движения, момента количества движения и избыточного теплосодержания в закрученной струе:

$$2\pi \int_0^{\infty} (\rho u_1^2 + \rho u_1 u_0 + P) r dr = K_0, \quad 2\pi \int_0^{\infty} \rho (u_0 + u_1) w r^2 dr = L_0,$$

$$2\pi\rho c_P \int_0^{\infty} (u_0 + u_1) \Delta T r dr = Q \}. \quad (3)$$

Вводя переменные автомодельности [1] и функцию тока ψ

$$X = x, \quad \eta = k^{-1/2} r X^{-1/3}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4)$$

запишем разложения $\psi, P, \Delta T$ в виде ряда по степеням X :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(X, \eta) = k [a_1(\eta) + (a_2(\eta) \ln X + a_3(\eta)) X^{-2/3} + (a_4(\eta) \ln^2 X + \\ + a_5(\eta) \ln X + a_6(\eta)) X^{-4/3}] , \\ W(X, \eta) = b_1(\eta) X^{-1} + (b_2(\eta) \ln X + b_3(\eta)) X^{-5/3} + \dots, \\ \frac{P(X, \eta)}{\rho} = c_1(\eta) X^{-2} + (c_2(\eta) \ln X + c_3(\eta)) X^{-8/3} + \dots, \\ \Delta T(X, \eta) = d_1(\eta) X^{-2/3} + (d_2(\eta) \ln X + d_3(\eta)) X^{-4/3} + \dots \end{array} \right. \quad (5)$$

Появление логарифмического члена в разложениях (5) позволяет добавить в правую часть системы уравнений a_i, b_i, c_j, d_i собственную функцию с произвольной постоянной, имеющую ту же особенность в нуле, что и правая часть уравнения без собственной функции. Причем эти члены рассматриваются как составляющие одного шага в асимптотическом разложении (5). Переходя к переменным автомодельности (4) и подставляя в систему уравнений (1) разложения (5), получим при соответствующих степенях X следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $a_i(\eta), b_i(\eta), c_i(\eta), d_i(\eta)$:

$$\left(\frac{a_i'}{\eta}\right)'' + \left(\frac{a_i'}{\eta}\right)' \left(\frac{1}{\eta} + \frac{u_0}{3}\eta\right) + \frac{2}{3}u_0 \left([1 + \frac{i}{2}] - [\frac{i}{6}]\right) \frac{a_i'}{\eta} = A_i,$$

$$b_j'' + b_j' \left(\frac{1}{\eta} + \frac{u_0}{3}\eta\right) + b_j \left(\frac{u_0}{3}(1 + 4[\frac{j}{2}]) - \frac{1}{\eta^2}\right) = B_j,$$

$$d_j'' + d_j' \left(\frac{1}{\eta} + Pr \frac{u_0}{3}\eta\right) + d_j \frac{2}{3} Pr u_0 [1 + \frac{j}{2}] = D_j,$$

$$\eta c_1' = b_1^2, \quad \eta c_2' = 2b_1 b_2, \quad \eta c_3' = 2b_1 b_3,$$

$$A_1 = A_2 = A_4 = B_1 = B_2 = D_1 = D_2 = 0,$$

$$B_3 = -\frac{2}{3} \frac{a_1'}{\eta} b_1 + u_0 b_2, \quad D_3 = -\frac{2}{3} Pr \frac{a_1'}{\eta} d_1 + Pr u_0 d_2,$$

$$A_3 = -\frac{2}{3} \left(\frac{a'_1}{\eta}\right)' + u_0 \frac{a'_1}{\eta}, \quad A_5 = 2u_0 \frac{a'_4}{\eta} - 2 \frac{a'_1 a'_2}{\eta^2} + \frac{2}{3} \frac{a_2}{\eta} \left(\frac{a'_1}{\eta}\right)',$$

$$A_6 = u_0 \frac{a'_5}{\eta} + \frac{a'_1 a'_2}{\eta^2} - 2 \frac{a'_1 a'_3}{\eta^2} + \frac{2}{3} \frac{a_3}{\eta} \left(\frac{a'_1}{\eta}\right)' - \frac{a_2}{\eta} \left(\frac{a'_1}{\eta}\right)' - 2c_1 - \frac{1}{3} \eta c'_1,$$

где выражение в квадратных скобках обозначает целую часть числа; $i = 1, 2, \dots, 6, j = 1, 2, 3$.

Известное решение первого уравнения для $a_1(\eta), b_1(\eta), c_1(\eta)$

$$a_1(\eta) = 3 \frac{\gamma}{u_0} (1 - e^{-z}), \quad \frac{a'_1}{\eta} = \gamma e^{-z}, \quad b_1 = \lambda z^{1/2} e^{-z},$$

$$c_1 = -\frac{1}{4} \lambda^2 e^{-2z}, \quad z = \frac{1}{6} u_0 \eta^2, \quad \gamma = \frac{K_0}{6\pi\rho k}, \quad \lambda = \frac{L\sqrt{6u_0}}{32\pi\rho k^{3/2}}.$$

Автомодельное решение для температуры [4]

$$d_1(\eta) = \beta e^{-Prz}, \quad \beta = \frac{PrQ}{6\pi\rho c_p k_1}.$$

Постоянные γ, λ, β определяются из условия (3).

Интегрирование уравнений для нахождения функций $a_i(\eta)$ производится с помощью замены $z = u_0 \eta^2/6$ и перехода к вырожденным гипергеометрическим уравнениям [5]. Решения для $a_2(\eta)$ и $a_3(\eta)$, удовлетворяющие условиям (2) и (3), имеют вид:

$$a_2 = \frac{\gamma^2}{2u_0^2} z e^{-z}, \quad \frac{a'_2}{\eta} = \frac{\gamma^2}{6u_0} (1-z) e^{-z},$$

$$a_3 = \frac{3\gamma_2}{u_0} z e^z + \frac{3}{4} \frac{\gamma^2}{u_0^2} (e^{-2z} + e^{-z} - 2 + z e^{-z} \int_0^z \frac{e^{-z}-1}{z} dz),$$

$$\frac{a'_3}{\eta} = \gamma_2 (1-z) e^{-z} + \frac{\gamma^2}{4u_0} [(1-z) e^{-z} \int_0^z \frac{e^{-z}-1}{z} dz - 2e^{-z} - e^{-2z}],$$

где постоянная γ_2 умножается на собственную функцию уравнения $a_3(\eta)$, т.е. функцию, удовлетворяющую всем граничным и интегральным условиям.

Значение постоянной γ_2 определяется исходя из условий формирования закрученной струи. Функции $a_2(\eta)$ и $a_3(\eta)$ определяют второй член ряда асимптотического разложения функции тока. Аналогично интегрируются уравнения для $b_2(\eta)$ и $b_3(\eta), d_2(\eta)$ и $d_3(\eta)$:

$$b_2 = \frac{\lambda\gamma}{6u_0} z^{1/2} e^{-z} (1 - \frac{1}{2}z), \quad b_3 = \frac{\lambda\gamma}{8u_0} z^{1/2} e^{-z} [(2-z) \int_0^z \frac{e^{-z}-1}{z} dz +$$

$$+ \frac{1-e^{-z}}{z} - 3 - e^{-z}] + \lambda_2 z^{1/2} e^{-z} (1 - \frac{1}{2}z), d_2 = \frac{2Pr\beta\gamma}{3u_0(1+Pr)^2} (1 - Prz)e^{-Prz}, d_3 = \beta_2 (1 - Prz)e^{-Prz} + \frac{Pr\beta\gamma}{u_0(1+Pr)^2} [(1 - Prz)e^{-Prz} \int_0^z \frac{e^{-z}-1}{z} dz - 2e^{-Prz} - Pre^{-(1+Pr)z}],$$

где постоянные λ_2, β_2 являются характеристическими постоянными данной задачи.

Интегрирование уравнений для $c_2(\eta), c_3(\eta)$ дает

$$c_2(\eta) = \frac{\lambda^2\gamma}{48u_0} e^{-2z} (2z-3), c_3(\eta) = \frac{\lambda^2\gamma}{8u_0} [\frac{1}{4}e^{-2z} (2z-3) \int_0^z \frac{e^{-z}-1}{z} dz - \frac{1}{4} \int_0^z \frac{e^{-2z}(e^{-z}-1)}{z} dz + \frac{5}{4}e^{-2z} + \frac{1}{2}e^{-3z}] + \frac{\lambda\lambda_2}{8} e^{-2z} (2z-3).$$

Условия (3) для функций $c_2, c_3, b_2', b_3, d_2, d_3$ выполняются тождественно при любых значениях λ_2, β_2 . Интегрирование уравнений для $a_4(\eta), a_5(\eta), a_6(\eta)$ определяет третий член асимптотического разложения скорости и позволяет учесть влияние давления на ее распределение.

Интегрируя уравнение для $a_4(\eta)$, получим

$$\frac{a_4'}{\eta} = \gamma_3 e^{-z} (z^2 - 4z + 2).$$

Решение для $a_5(\eta)$

$$\frac{a_5'}{\eta} = -3\gamma_3 [e^{-z} (z^2 - 4z + 2) \ln z + e^{-z} (6-4z)] + \frac{\gamma^3}{24u_0^2} [e^{-z} (z^2 - 4z + 2) \int_0^z \frac{e^{-z}}{z} dz - (1-z)e^{-2z}] + \gamma_4 (z^2 - 4z + 2)e^{-z}.$$

Постоянная $\gamma_3 = \gamma^3 / (72u_0)$ находится с помощью граничных интегральных условий; γ_4 — произвольная константа, стоящая перед собственной функцией.

Интегрируя уравнение для $a_6(\eta)$ и удовлетворяя граничным и интегральным условиям, определим значение γ_4 , и в решении снова появится характеристическая постоянная γ_6 . Выпишем выражения $a_4(\eta), a_5(\eta), a_6(\eta)$:

$$\frac{a_4'}{\eta} = \frac{\gamma^3}{72u_0} e^{-z} (z^2 - 4z + 2), \frac{a_5'}{\eta} = [\frac{\gamma\gamma_2}{6u_0} - \frac{\lambda^2}{24u_0} - \frac{5\gamma^3}{216u_0^2} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\gamma^3}{24u_0^2} (2\ln 2 - \ln 3)] e^{-z} (z^2 - 4z + 2) + \frac{\gamma^3}{24u_0^2} [e^{-z} (z^2 - 4z + \\
& + 2) \int_0^z \frac{e^{-z} - 1}{z} dz - e^{-2z} (1 - z) - 2e^{-z} (3 - 2z)] , \quad (6) \\
& \frac{a'_6}{\eta} = \frac{4\gamma\gamma_2 - \lambda^2}{16u_0} [e^{-z} (z^2 - 4z + 2) \int_0^z \frac{e^{-z} - 1}{z} dz - e^{-z} (6 - 4z) - \\
& - e^{-2z} (1 - z)] - \frac{\gamma^3}{16u_0^2} \left\{ e^{-z} (z^2 - 4z + 2) \int_0^z \left[\frac{1 - e^{-z}}{z} \int_0^z \frac{e^{-z} - 1}{z} dz + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{e^z}{z} \int_0^z \frac{e^{-z} (e^{-z} - 1)^2}{z} dz - (2\ln 2 - \ln 3) \right] dz - \frac{4}{9} \int_0^z \frac{e^{-2z} - 1}{z} dz \right\} + \\
& + (3 - z) \int_0^z \frac{e^{-z} (e^{-z} - 1)^2}{z} dz - e^{-z} \left(\frac{31}{3} - \frac{20}{9} z \right) - e^{-2z} (7 - z) - \\
& - \frac{2}{9} z e^{-3z} + [e^{-z} (z^2 - 8z + 8) + e^{-2z} (1 - z)] \int_0^z \frac{e^{-z} - 1}{z} dz + \\
& + \gamma_6 e^{-z} (z^2 - 4z + 2) .
\end{aligned}$$

Интегралы в выражении (6) являются табличными [6]. Распределение скорости через функцию тока ψ окончательно примет вид

$$\begin{aligned}
u_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{a'_1}{\eta} X^{-2/3} + \left(\frac{a'_2}{\eta} \ln X + \frac{a'_3}{\eta} \right) X^{-4/3} + \\
+ \left(\frac{a'_4}{\eta} \ln^2 X + \frac{a'_5}{\eta} \ln X + \frac{a'_6}{\eta} \right) X^{-6/3} + \dots \quad (7)
\end{aligned}$$

Экспериментально были исследованы закрученные струи с тремя интенсивностями закруток $\Omega = 4L_0 / (K_0 d)$ при скорости спутного потока $u_0 = 10$ м/с. Закрученные струи формировались шнековыми завихрителями, смонтированными в корпусе цилиндрического сопла. Диаметр сопла $d = 10,5$ мм, диаметр аэродинамической трубы $D = 1000$ мм. Измерения скоростей и давления в струе проводились шаровым пятиканальным зондом с диаметром головки 4 мм. Среднерасходная скорость истечения из сопла составляет 74 м/с. Интегральные и характеристические постоянные исследованных струй представлены в табл. 1.

На рис. 1 показано изменение продольных скоростей $u^* = u_1(x, 0) / U$ вдоль оси струи ($\bar{x} = x/d$), изменение давления $P^* = 2P_1 / (\rho U^2)$ вдоль оси и максимальные значения скорости $u_m = u_m / U$ в сечении струи. Сравнивая экспериментально полученное изменение скорости вдоль оси с теоретическим (7) (при $z = 0$), определим значения постоянных γ_2, γ_6 , а сравнением результа-

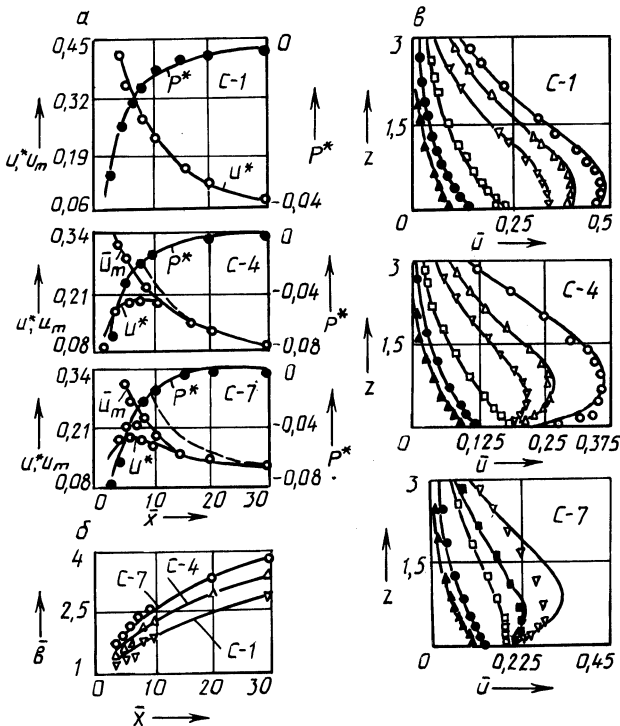


Рис. 1. Изменение осевой скорости и давления вдоль оси струи (а), границы струи (б), распределение осевой скорости по сечениям струи (е):

○ - $x/d = 4$; △ - $x/d = 5$; ▽ - $x/d = 6$; ■ - $x/d = 8$; □ - $x/d = 10$; ● - $x/d = 20$; ▲ - $x/d = 30$

Т а б л и ц а 1

Ω	$K, Н$	$L \cdot 10^2, Н \cdot м$	λ	λ_2	γ_2	$-\gamma_6$	k_3
1,14	2,24	0,634	0,138	0,088	0,305	0,540	11,3
1,31	2,20	0,721	0,280	0,129	0,388	0,572	9,3
1,82	2,22	1,010	0,686	0,283	0,559	0,112	9,9

тов измерения давления вдоль оси струи с (5) при $z = 0$ находим λ_2 . Результаты расчета представлены на рис. 1 сплошными линиями, автомодельные решения пунктирными. На рис. 1, б показано изменение границы закрученной струи в спутном потоке. Здесь $\bar{b} = 2b/d$, а за границу струи $b = b(x)$ приняты ордината, при которой скорость составляет 10 % от максимальной в сечении, и ширина струи $b = mx^{1/3}$. Из рис. 1, б видно, что с увеличением интенсивности закрутки при единой спутности потока струя значительно расширяется и область применимости закона $b = mx^{1/3}$ уменьшается. В слабозакрученной струе (С-1) $u^* = u_m$, а в струях (С-4, С-7) значения максимальной скорости u_m и скорости на оси u^* различны. С увеличением интенсивности закрутки Ω

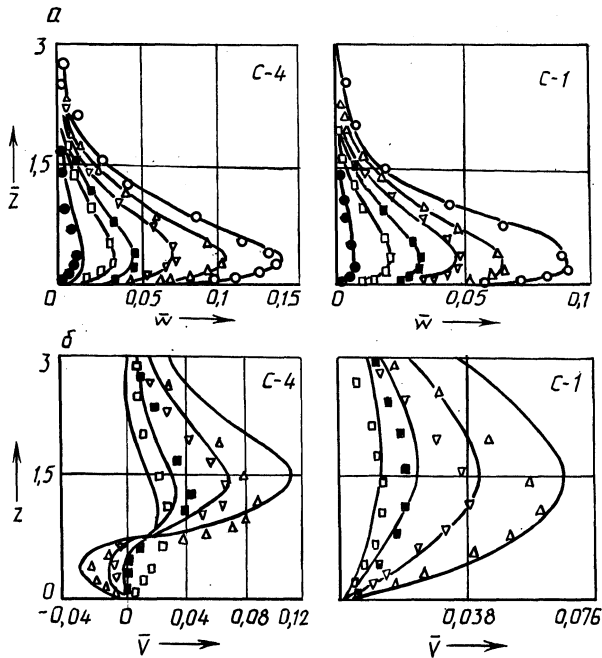


Рис. 2. Изменение скоростей закрутки \bar{w} (а) и радиальной \bar{v} (б) по сечениям струи

протяженность зоны от сечения, где u^* максимальна, до сечения, где $u^* = u_m$, увеличивается с 5 (С-4) до 10 (С-7) калибров. На рис. 2 показаны результаты расчета скоростей v, w по полученным формулам. По оси ординат отложена переменная z , которая связана с физической ординатой r :

$$r = k_4 \bar{x}^{1/3} \sqrt{z}, \quad k_4 = k_3 \sqrt{\frac{6}{u_0}}.$$

Видно, что появление зоны "провалов скорости" u связано с увеличением интенсивности закрутки Ω и сопровождается возникновением отрицательных радиальных скоростей вблизи оси струи. Максимальное значение скорости u в зоне "провалов" скорости u и нулевое значение радиальной скорости v практически соответствуют одной ординате z .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бушмарин О.Н. Закрученная струя в спутном потоке жидкости той же плотности // Тр. ЛПИ. Энергомашиностроение. - 1955. - Т. 176. - С. 115-136.
2. Коробко В.И. Развитие ламинарной закрученной струи в спутном потоке той же жидкости // Аэродинамика. - Саратов, 1973. - Вып. 2(5). - С. 80-91.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М., 1970. - 904 с.
4. Вулис Л.А., Кашкаров В.П. Теория струй вязкой жидкости. - М., 1965. - 431 с.
5. Бейгмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - М., 1965. - Ч. 1. - 294 с.
6. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций. - М., 1959. - 420 с.
7. Stewartson K. On asymptotic expansion in the theory of boundary layers // J. Math. Phys. - 1957. - Vol. 36. - P. 173-191.
8. Berger S.A. The incompressible laminar axisymmetric far wake // J. Math. Phys. - 1968. - Vol. 47. - P. 292-309.