Нетрудно показать, что

$$\left|\frac{t_1 - z_1}{t_1 - z_2}\right| = \frac{z_1}{R_1} \equiv \lambda_1 , \quad \left|\frac{t_2 - z_1}{t_2 - z_2}\right| = \frac{l - z_1}{R_2} \equiv \lambda_2$$

и, следовательно,

$$m_0 = \frac{p_1 - p_2}{\ln(\lambda_1/\lambda_2)} , \qquad C_0 = \frac{p_2 \ln\lambda_1 - p_1 \ln\lambda_2}{\ln(\lambda_1/\lambda_2)} .$$

С учетом (4) на окружностях L_ν имеем

$$Q_1 = -Q_2 = -2\pi k (p_1 - p_2)/\ln(\lambda_1/\lambda_2) . \tag{8}$$

Давление в любой точке z области S определяется соотношениями (3) и (5)

$$p = m_0 \ln \sqrt{\frac{(x - z_1)^2 + y^2}{(x - z_2)^2 + y^2}} + C_0 .$$

Рассмотрим также случай, когда область фильтрации S – эксцентричное кольцо, ограниченное окружностями L_1 и L_2 (приближенные решения см. в [1, 4, 5]) . Пусть по-прежнему R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$) – радиусы окружностей L_1 и L_2 ; $|O_1 O_2| = l$ – расстояние между их центрами, M и N – общие центры инверсии этих окружностей (рис. 2). Давление p на границе области S удовлетворяет условию (2). В этом случае, если значения l и R_ν удовлетворяют неравенству $R_1 > l + R_2$ функция $\Psi_0(z)$, значения $z_1 = |O_1 M|$, $z_2 = |O_1 N|$ и расходы Q_ν на окружностях L_ν также определяются выражениями (5), (7) и (8) при $\lambda_1 = z_1/R_1$, $\lambda_2 = (z_1 - l)/R_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пирвердян А.М. Нефтяная подземная гидравлика. – Баку, 1956. – 628 с. 2. Вахитов Г.Г. Разностные методы решения задач разработки нефтяных месторождений. – Л., 1970. – 248 с. 3. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М., 1984. – 208 с. 4. Голубев О.В. Курс механики сплошных сред. – М., 1972. – 368 с. 5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М., 1977. – 664 с.

УДК 532.5:532.135

Е.Н. ЛАМБИНА, канд. физ.-мат. наук,
Б.И. ЛАПУШИНА, канд. техн. наук (БПИ)

ПОВЕДЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ ОБОБЩЕННОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА МЕЖДУ КОНГРУЭНТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ПРИ МЕДЛЕННОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрим слой вязкоупругой жидкости, заключенный между конгруэнтными границами. Реологическое поведение жидкости описывается уравнением

$$S = 2 \int_0^t \mu(t-\xi)\, \dot{\epsilon}(\xi)\, d\xi ,$$

где S – девиатор напряжений; $\dot{\epsilon}$ – тензор скоростей деформации; $\mu(t)$ – функция релаксации.

Границы могут быть в виде граней двугранных углов; длинных прямоугольных пластин; круговых конусов; дисков. Одна из границ неподвижна, другая – медленно нагружается силой $F(t)$, что приводит к сближению границ. Движение начинается из состояния покоя, начальная толщина слоя $-h_0$.

В [1] показано, что толщина слоя $h(t)$ и сила $F(t)$ связаны интегродифференциальным соотношением

$$\int_0^t \mu(t-\xi)\, \dot{\varphi}(\xi)\, d\xi = KF(t), \tag{1}$$

где K – константа, значение которой определяется геометрией границ и условиями течения (вытеснения или растекания) среды; $\varphi(t) = 1/h^2 - 1/h_0^2$ при вытеснении среды; $\varphi(t) = 1/h^5 - 1/h_0^5$ при растекании среды между гранями двугранных углов и прямоугольными пластинами; $\varphi(t) = 1/h^4 - 1/h_0^4$ в случае растекания среды между конусами и дисками.

Таким образом, определение толщины вязкоупругого слоя в любой момент времени t сводится к решению интегрального уравнения (1) для функции $\varphi(t)$. В [1] эта задача решена для среды Максвелла с функцией релаксации

$$\mu(t) = G \exp(-t/\tau) ,$$

где $G = \eta/\tau$; η – коэффициент вязкости среды; τ – время релаксации.

Приведем решение для обобщенной n-звенной модели Максвелла. В этом случае

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} G_i \exp(-r_i t) \quad (r_i = 1/\tau_i \,, \;\; r_i < r_{i+1}). \tag{2}$$

Применим к соотношениям (1) и (2) интегральное преобразование Лапласа. Получим

$$\overline{\mu}(s)\, s\overline{\varphi}(s) = K\overline{F}(s), \quad \overline{\varphi}(s) = K\overline{F}(s)\, L(s) , \tag{3}$$

где

$$\overline{\mu}(s) = \sum_{i=1}^{n} G_i/(s+r_i), \quad L(s) = 1/[s\overline{\mu}(s)] .$$

Следовательно,

$$L(s) = \prod_{i=1}^{n} (s+r_i) / [s \sum_{i=1}^{n} G_i \prod_{k \neq i}^{n} (s+r_k)] .$$

Поскольку функция $L(s)$ является отношением двух полиномов одной степени, ее можно представить в виде

$$L(s) = A + A_0/s + \sum_{j=1}^{n-1} A_j/(s-s_j),$$

где s_j – нули полинома $(n-1)$-й степени

$$P(s) = \sum_{i=1}^{n} G_i \prod_{k \neq i} (s + r_k) .$$

Поскольку значения $P(-r_j)$ и $P(-r_{j+1})$ имеют противоположные знаки, s_j действительны, отрицательны и различны.

Соотношение (3) примет вид

$$\bar{\varphi}(s) = K\,[A\bar{F}(s) + A_0\bar{F}(s)/s + \Sigma A_j\bar{F}(s)/(s - s_j)] \ ,$$

где

$$A = \lim_{s\to\infty} L(s); \ A_0 = \lim_{s\to 0} [sL(s)]; \ A_j = \lim_{s\to s_j} [(s-s_j)L(s_j)] .$$

В результате вычислений получим:

$$A = 1/\sum_{i=1}^{n} G_i, A_0 = 1/\sum_{i=1}^{n} \eta_i \ ,$$

$$A_j = -1/(s_j \sum_{i=1}^{n} G_i (s_j + r_i)^2) .$$

Поскольку выражение $1/(s - s_j)$ является изображением функции $\exp(s_j t)$ при $s_j \leqslant 0$, на основании теоремы о свертке будем иметь:

$$\varphi(t) = K[AF(t) + A_0 \int_0^t F(t)dt + \sum_{j=1}^{n-1} A_j \exp(s_j t) \times$$

$$\times \int_0^t \exp(-s_j t) F(t)\,dt] \ .$$

В частном случае при $n = 1$ (модель Максвелла) полином $P(s)$ вырождается в константу (не нуль). При этом

$$\varphi(t) = K[\tau F(t) + \int_0^t F(t)\,dt]/\eta \ .$$

Толщина слоя

$$h(t) = h_0 [1 + h_0^{\alpha}\varphi(t)]^{-\beta} , \qquad (4)$$

где $\alpha = 2$ при вытеснении среды между границами; $\alpha = 5$ при растекании среды между гранями двугранных углов и прямоугольными пластинами; $\alpha = 4$ при растекании среды между конусами и дисками; $\beta = 1/\alpha$.

Проведем анализ решения. Если T – продолжительность действия силы $F(t)$, то при любой функции релаксации в момент времени $t < T$ [1] имеет место явление "упругого возврата" [2]. Рассмотрим поведение вязкоупругого слоя при $t \geqslant T$ после снятия силы.

1. Модель Максвелла:

$$\varphi(t)\,|_{t \geqslant T} = (K/\eta) \int_0^T F(t)\,dt = \text{const} .$$

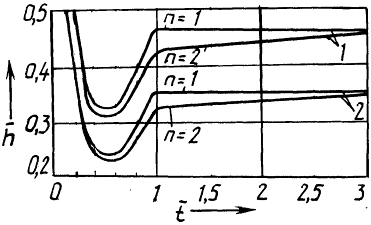

Рис. 1. Изменение во времени толщины слоя для одно- и двухзвенной модели Максвелла при $F(\bar{t}) = 16F_{max}\bar{t}^2(1-\bar{t})^2$; $\bar{t} = t/T$; $\bar{h} = h/h_0$:

1 – $16F_{max}KT/(150\eta) = 1$; *2* – $16F_{max}KT/(300\eta) = 1$

Из выражения (4) следует, что течение вязкоупругого слоя в момент времени $t = T$ прекращается и его толщина h_1 в дальнейшем не изменяется.

2. n-звенная модель Максвелла:

$$\varphi(t)\,|_{t\geq T} = K(A_0 \int_0^T F(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n-1} A_j \exp(s_j t) \int_0^T \exp(-s_j t) F(t)\,dt).$$

Все коэффициенты A_0, A_j положительны. Из отрицательности s_j следует, что функция $\varphi(t)$ монотонно убывает, стремясь к предельному значению $\varphi_{пр}$. При этом $h(t)$ монотонно возрастает, также стремясь к предельному значению $h_{пр} = h_1$, где h_1 – не изменяющаяся после снятия силы $F(t)$ толщина вязкоупругого слоя с одним временем релаксации. Для этого слоя $\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$, $G = \sum_{i=1}^{n} G_i$.

Таким образом, для обобщенной модели Максвелла явление упругого возврата имеет место и после снятия нагрузки. На рис. 1 представлены результаты расчета для двухзвенной модели Максвелла и модели Максвелла, для которой $\eta = \eta_1 + \eta_2$ и $G = G_1 + G_2$, $\tau_2 = 0{,}25\tau_1$, $\eta_2 = 0{,}5\eta_1$, $T = \tau_1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а м б и н а Е.Н., Л а п у ш и н а Б.И. Течение вязкоупругой среды наследственного типа в зазоре между конусами // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 1986. – Вып. 13. – С. 88–96. 2. Ш у л ь м а н З.П., Х у с и д Б.М. Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. – Минск, 1983. – 255 с.

УДК 532.135:621.822

Ю.М. ПИКУС, канд. техн. наук,
Г.Н. АЛЕХНОВИЧ (БПИ)

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫМИ ЖИДКОСТЯМИ

Уравнения теории смазки реологически сложными жидкостями в отличие от классических уравнений Рейнольдса [1] должны включать компоненты тензора напряжений. Кроме того, их необходимо преобразовать с учетом