МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И НЕНЬЮТОНОВСКИХ СИСТЕМ

УДК 532.5

А.И. ПРУСОВ (БГУ)

ЗАДАЧА О СКВАЖИНЕ С ЗАДАННЫМ НАПОРОМ

Исследование установившейся напорной фильтрации жидкости к скважинам в однородном изотропном недеформируемом пласте сводится к изучению краевой задачи для уравнения Лапласа в многосвязной области. Точное решение такой задачи получено для случая, когда заданы расходы скважин, а радиусы их малы в сравнении с расстояниями между ними [1, 2].

Ниже приводится точное решение задачи фильтрации несжимаемой жидкости в неограниченном пласте с двумя скважинами различных радиусов, на контуре каждой из которых задано давление жидкости. Полученное решение может быть использовано также в качестве эталонного для приближенных численных решений задач фильтрации однородной жидкости, вытеснения нефти водой [2] или водными растворами с добавками химических реагентов [3].

Рассматривается стационарная, изотермическая фильтрация однородной несжимаемой жидкости в недеформируемой, изотропной пористой среде. Движение жидкости происходит в плоскости S с двумя скважинами, контуры которых L_ν – окружности радиусов R_ν $(\nu = 1{,}2)$, а расстояние между центрами O_1 и O_2 – l. Оси декартовых координат x и y расположим,как показано на рис. 1. Давление жидкости $p(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Требуется найти $p(x, y)$ в области S и расходы Q_1 и Q_2 при условии

$$p = p_\nu = \text{const} \quad \text{на} \quad L_\nu, \tag{2}$$

где Q_ν – масса жидкости, проходящей за единицу времени через цилиндрическую поверхность, образующая которой равна 1, а направляющая – окружность L_ν. Положительное значение Q_ν указывает на перемещение жидкости из скважины в область пласта, а отрицательное – из пласта в скважину.

В плоскости S введем комплексную переменную $z = x + iy$ и комплексный потенциал $\Psi_0(z)$ такой, что

$$p(x, y) = \operatorname{Re}\Psi_0(z), \tag{3}$$

где $\Psi_0(z)$ – аналитическая функция в области S, ограниченная на бесконечности.

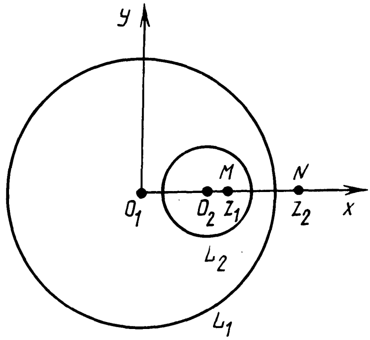

Рис. 1. К решению задачи о двух скважинах в плоскости S

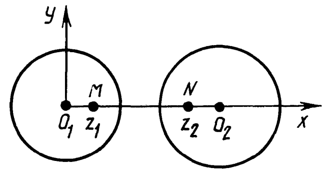

Рис. 2. К решению задачи для эксцентричного кольца

Расход жидкости на любой дуге AB в области фильтрации определяется по формуле

$$Q_{AB} = -k \operatorname{Im} [\Psi_0(z)]_A^B , \tag{4}$$

где k – коэффициент фильтрации; символ $[...]_A^B$ обозначает приращение значения выражения в квадратных скобках на длине дуги от точки A до точки B.

Решение задачи (1), (2) ищется в виде

$$\Psi_0(z) = m_0 \ln [(z - z_1)/(z - z_2)] + C_0 , \tag{5}$$

где m_0 и C_0 – вещественные постоянные; z_1 и z_2 – точки на оси x такие, что $|O_1 M| = z_1$ и $|O_1 N| = z_2$ (см. рис. 1).

Пусть M и N – точки инверсии для окружностей L_1 и L_2, т. е.

$$R_1^2 = |O_1 M|\, |O_1 N| , \quad R_2^2 = |O_2 N|\, |O_2 M| . \tag{6}$$

Так как $|O_1 O_2| = l$, из равенства (6) следует

$$R_1^2 = z_1 z_2 , \quad R_2^2 = (l - z_1)\, (l - z_2) ,$$

откуда

$$z_\nu = \frac{l^2 + R_1^2 - R_2^2}{2l} + (-1)^\nu \sqrt{\left(\frac{l^2 + R_1^2 - R_2^2}{2l} \right)^2 - R_1^2} . \tag{7}$$

По смыслу задачи z_1 и z_2 – различные вещественные величины. Это всегда выполняется, если $l > R_1 + R_2$.

Используя условие (2), получаем

$$m_0 \ln \left| \frac{t_\nu - z_1}{t_\nu - z_2} \right| + C_0 = p_\nu \quad \text{на} \quad L_\nu ,$$

где t_ν – значения z на контуре L_ν.

Нетрудно показать, что

$$\left|\frac{t_1-z_1}{t_1-z_2}\right| = \frac{z_1}{R_1} \equiv \lambda_1 , \quad \left|\frac{t_2-z_1}{t_2-z_2}\right| = \frac{l-z_1}{R_2} \equiv \lambda_2$$

и, следовательно,

$$m_0 = \frac{p_1-p_2}{\ln(\lambda_1/\lambda_2)} , \qquad C_0 = \frac{p_2\ln\lambda_1 - p_1\ln\lambda_2}{\ln(\lambda_1/\lambda_2)} .$$

С учетом (4) на окружностях L_ν имеем

$$Q_1 = -Q_2 = -2\pi k(p_1 - p_2)/\ln(\lambda_1/\lambda_2) . \tag{8}$$

Давление в любой точке z области S определяется соотношениями (3) и (5)

$$p = m_0 \ln\sqrt{\frac{(x-z_1)^2+y^2}{(x-z_2)^2+y^2}} + C_0 .$$

Рассмотрим также случай, когда область фильтрации S – эксцентричное кольцо, ограниченное окружностями L_1 и L_2 (приближенные решения см. в [1, 4, 5]). Пусть по-прежнему R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$) – радиусы окружностей L_1 и L_2; $|O_1O_2| = l$ – расстояние между их центрами, M и N – общие центры инверсии этих окружностей (рис. 2). Давление p на границе области S удовлетворяет условию (2). В этом случае, если значения l и R_ν удовлетворяют неравенству $R_1 > l + R_2$ функция $\Psi_0(z)$, значения $z_1 = |O_1M|$, $z_2 = |O_1N|$ и расходы Q_ν на окружностях L_ν также определяются выражениями (5), (7) и (8) при $\lambda_1 = z_1/R_1$, $\lambda_2 = (z_1 - l)/R_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пирвердян А.М. Нефтяная подземная гидравлика. – Баку, 1956. – 628 с. 2. Вахитов Г.Г. Разностные методы решения задач разработки нефтяных месторождений. – Л., 1970. – 248 с. 3. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М., 1984. – 208 с. 4. Голубев Г.В. Курс механики сплошных сред. – М., 1972. – 368 с. 5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М., 1977. – 664 с.

УДК 532.5:532.135

Е.Н. ЛАМБИНА, канд. физ.-мат. наук,
Б.И. ЛАПУШИНА, канд. техн. наук (БПИ)

ПОВЕДЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ ОБОБЩЕННОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА МЕЖДУ КОНГРУЭНТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ПРИ МЕДЛЕННОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрим слой вязкоупругой жидкости, заключенный между конгруэнтными границами. Реологическое поведение жидкости описывается уравнением