УДК 534.011

Н.А. ДОКУКОВА (ИНДМАШ АН БССР)

К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА–ЛАГЕРРА

Динамические задачи теории упругости при использовании волновых потенциалов сводятся к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u .$$

Обычный метод решения такого уравнения связан с применением интегрального преобразования Лапласа, что не совсем удобно из-за необходимости нахождения оригиналов по известным изображениям (по формуле Римана–Меллина). Эти трудности можно обойти с помощью предложенного в [1, 2, 3] преобразования Чебышева–Лагерра. Ниже приводятся примеры, иллюстрирующие возможности нахождения точного решения смешанных задач для волнового уравнения и частот собственных колебаний механических систем этим методом.

1. В качестве примера рассмотрим задачу о нахождении решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при начальных и граничных условиях:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x) , \ \ \partial u(x, 0)/\partial t = \varphi_1(x) , \ \ u(0,t) = 0, \ \ u(1,t) = 0. \tag{2}$$

Здесь функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ должны удовлетворять условиям естественного согласования

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(1) = 0, \ \ \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0. \tag{3}$$

Искомое решение уравнения (1) представим в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) L_n(\gamma t), \tag{4}$$

где $L_n(\gamma t)$ – полиномы Чебышева–Лагерра; γ – положительная постоянная.

Внося (4) в (1)...(3), получим для $u_n(x)$ следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$u_n^n(x) - \omega^2 u_n(x) = -\omega^2 \gamma^{-1} \partial u(x, 0)/\partial t - \omega^2 (n+1) u(x,0) +$$

$$+ \omega^2 \sum_{k=0}^{n-1} (n+1-k) u_k(x) ,$$

матрица коэффициентов которых треугольная.

Решение этой системы имеет вид:

$$u_n(x) = D_1^{(n)} \operatorname{sh}\omega x + D_2^{(n)} \operatorname{ch}\omega x - \omega \int_0^x [(n+1)\varphi_0(\xi) +$$

$$+\gamma^{-1}\varphi_1(\xi) - \sum_{k=0}^{n-1}(n+1-k)u_k(\xi)] \operatorname{sh}\omega(x-\xi)\,d\xi \ . \tag{5}$$

В силу линейности задачи (1)...(3) достаточно ограничиться рассмотрением лишь таких начальных данных:

$$\varphi_{0\nu}(x) = A_\nu \sin\nu x \quad (\nu = k\pi,\ k\in N), \tag{6}$$

$$\varphi_{1\theta}(x) = B_\theta \sin\theta x \quad (\theta = m\pi,\ m\in N) \tag{7}$$

(общий случай можно исследовать с помощью принципа суперпозиции).

Обозначая через $u_n^{\nu,\theta}(x)$ решение задачи (1)...(3) при условиях (6) и (7), получим из (5):

$$\left.\begin{aligned}
&u_0^{\nu,\theta}(x) = A_\nu(1-\delta)\sin\nu x + B_\theta\gamma^{-1}(1-g)\sin\theta x\,,\\
&u_1^{\nu,\theta}(x) = A_\nu(1-\delta)\,2\delta\sin\nu x + B_\theta\gamma^{-1}(1-g)(2g-1)\sin\theta x\,,\\
&u_2^{\nu,\theta}(x) = A_\nu(1-\delta)(-4\delta^2+8\delta^3)\sin\nu x + B_\theta\gamma^{-1}(1-g)(g-8g^2+8g^3)\sin\theta x\\
&u_3^{\nu,\theta}(x) = A_\nu(1-\delta)(-4\delta^2+8\delta^3)\sin\nu x + B_\theta\gamma^{-1}(1-g)(g-8g^2+8g^3)\sin\theta x,\\
&u_4^{\nu,\theta}(x) = A_\nu(1-\delta)(\delta^2-12\delta^3+16\delta^4)\sin\nu x + B_\theta\gamma^{-1}(1-g)(5g^2-20g^3+\\
&+16g^4)\sin\theta x\,,\\
&u_5^{\nu,\theta}(x) = A_\nu(1-\delta)(6\delta^3-32\delta^4+32\delta^5)\sin\nu x + B_\theta\gamma^{-1}(1-g)(-g^2+\\
&+18g^3-48g^4+32g^5)\sin\theta x\ ,
\end{aligned}\right\}(8)$$

где $1-\delta = \omega^2(\omega^2+\nu^2)^{-1}$, $1-g = \omega^2(\omega^2+\theta^2)^{-1}$.

Внося (8) в (4), получим

$$u^{\nu,\theta}(x,t) = A_\nu(1-\delta)\left[\frac{1}{1-\delta} - \frac{1}{2!}\frac{\delta}{(1-\delta)^2}(\gamma t)^2 + \frac{1}{4!}\frac{\delta^2}{(1-\delta)^3}(\gamma t)^4 \pm \ldots\right]\times$$

$$\times\sin\nu x + B_\theta\gamma^{-1}(1-g)\left[\frac{1}{1-g}\gamma t - \frac{1}{3!}\frac{g}{(1-g)^2}(\gamma t)^3 + \frac{1}{5!}\frac{g^2}{(1-g^3)}(\gamma t)^5 \pm \ldots\right]\times$$

$$\times\sin\theta x\,. \tag{9}$$

При этом начальные условия (2), (6), (7) выполняются тождественно, что легко проверить непосредственными вычислениями. Бесконечные суммы в (9) образуют ряды Тейлора функций $\cos\gamma t$ и $\sin\gamma t$, если выполняются одновременно равенства $\delta^n (1-\delta)^{-n} = 1, g^n (1-g)^{-n} = 1$. Отсюда в силу (6), (7) $\omega = \nu = \theta = k\pi$ $(k = m)$ $\gamma = ak\pi$. Поэтому в соответствии с принципом суперпозиции из (9) получим решение исходной задачи (1)...(3) в таком виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(ak\pi t) + \frac{B_k}{ak\pi} \sin(ak\pi t)\right] \sin(k\pi x). \tag{10}$$

Формула (10) полностью совпадает с решением уравнений гиперболического типа методом разделения переменных [4] .

2. Рассмотрим теперь задачу об определении форм и частот собственных колебаний методом полиномов Чебышева–Лагерра. Ограничимся решением следующей граничной задачи:

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0, \tag{11}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Искомое решение будем искать в виде

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(\gamma x). \tag{13}$$

Внося (13) в (11) и используя первое граничное условие (12), получим рекуррентное соотношение для коэффициентов:

$$C_1 = \frac{\omega^2-\gamma^2}{\omega^2+\gamma^2} C_0, \quad C_n = \frac{\omega^2-\gamma^2}{\omega^2+\gamma^2} C_{n-1} - \frac{\gamma^2}{\omega^2+\gamma^2} \sum_{k=0}^{n-2} C_k \quad (n \geqslant 2). \tag{14}$$

Второе граничное условие (12) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(\gamma) = 0. \tag{15}$$

Внося (14) в (15) и пользуясь известными представлениями полиномов $L_n(\gamma)$ [5] , получим

$$\frac{\omega^2+\gamma^2}{\gamma\omega} C_0 \left(\omega - \frac{1}{3!}\omega^3 + \frac{1}{5!}\omega^5 \pm \ldots\right) = \frac{\omega^2+\gamma^2}{\gamma\omega} C_0 \sin\omega = 0. \tag{16}$$

Поскольку

$$\frac{\omega^2+\gamma^2}{\gamma\omega} C_0 = \frac{1}{\omega} y'(0) \neq 0, \tag{17}$$

из (16) получаем $\omega = m\pi$ (если условие (17) не выполняется, задача (11)–(12) имеет только тривиальное решение). Полагая $C_0 = a/2, \gamma = \omega$, получим

$$y(x) = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} \left\{L_{4k}(\omega x) - \frac{1}{2}\left[L_{4k+2}(\omega x) + L_{4k+3}(\omega x)\right]\right\}. \tag{18}$$

Формула (18) в точности совпадает с разложением в ряд по полиномам Чебышева–Лагерра функции $a\sin\omega x$, которая представляет собой известное решение задачи (11) – (12). Значение функции может быть определено с достаточной точностью при удержании двух членов этого ряда (речь идет фактически о восьмичленной частной сумме ряда (18), содержащей $L_0(\omega x)$, $L_1(\omega x)$, ..., $L_7(\omega x)$). Поэтому, ограничиваясь этими членами для нахождения корней уравнения $y(1) = 0$, получим для ω семь значений, отличающихся от точных в среднем на 4 %. При подстановке $x = 1$ и $\omega = \pi$ в (11) абсолютная погрешность результатов, получаемых по итоговой восьмичленной формуле, составляет 0,02. Для сравнения погрешность при семичленном разложении $\sin\omega$ в ряд Тейлора равна 0,077.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г а л а з ю к В.А., Г о р е ч к о А.Н. Об одном методе решения динамических задач теории упругости в сферических и цилиндрических координатах// Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 6. – С.41–44. 2. Г а л а з ю к В.А. Метод полиномов Чебышева–Лагерра в смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения 11-го порядка с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С.3–6. 3. Г а л а з ю к В.А., Г о р н я к Г.О. Исследования нестационарного температурного поля в бесконечном шаре с кольцевой линией раздела краевых условий методом полиномов Чебышева–Лагерра // Вестн. Львовского ун-та. – Задачи прикладной математики и механики. – 1985. – Вып. 23. – С. 72–77. 4. Т и х о н о в А.Н., С а м а р с к и й А.А. Уравнения математической физики. – М., 1977. – 736 с. 5. Л е б е д е в Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.; Л.,1963. – 360 с.

УДК 621.791:075

Н.Н. БУТКЕВИЧ, канд. техн. наук (БПИ),
И.В. БУТКЕВИЧ (ММЗ)

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДЕТАЛЯХ, РАБОТАЮЩИХ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗКАХ

Детали, работающие в переменных температурных полях, находятся в очень неблагоприятных условиях и часто выходят из строя вследствие смятия или растрескивания в зоне концентрации напряжений. В некоторых случаях при наличии большого числа теплосмен за время работы детали температурные напряжения значительно превышают механические. Например, для таких деталей, как крышка цилиндра, клапан двигателя внутреннего сгорания (ДВС), максимальные значения температурных напряжений более чем на порядок выше механических. Это позволяет в целях упрощения анализа ограничиться рассмотрением только температурных напряжений с учетом эффектов от нестационарности режимов эксплуатации.

Исследования температурных напряжений в клапане ДВС показали, что окружные составляющие этих напряжений σ_θ могут превышать предел прочности материала [1] . С целью снижения температурных напряжений для изготовления клапанов используют биметаллы со специально подобранными коэф-