$$C_{1n} = -\frac{C_{2n}\cos(k_n\delta)}{\sin(k_n\delta)} ,$$

а из условия $P_{xy} = 0$ при $y = \delta$ – выражение произвольной функции $f(\eta)$ в уравнении (3).

В результате касательные напряжения

$$P_{xy} = \frac{1}{l}(1-\eta^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dX_n}{d\eta}k_n\Big\{C_{2n}[\sin(k_n\delta) -$$

$$-\sin(k_n y)] - C_{1n}[\cos(k_n\delta) - \cos(k_n y)]\Big\} . \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) позволяют определить нормальные и касательные напряжения в зоне контакта листов при сварке взрывом и теоретически рассчитать процесс сварки в зависимости от размеров и механических свойств листов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каракозов Э.С. Соединение металлов в твердой фазе. – М., 1976. – 263 с.
2. Кудинов В.М., Коротеев А.Я. Сварка взрывом в металлургии. – М., 1978. – 165 с.

УДК 539.389.3+624.046+621.81

П.В. АЛЯВДИН, канд. техн. наук
(БПИ)

ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ НАГРУЖЕНИЯ

Предельный анализ трехмерных систем при простых программах повторно-переменного нагружения изложен во многих работах, например в [1, 2]. Однако даже для основных несущих элементов конструкций в виде призматических стержней до настоящего времени решены только частные вопросы теории их приспособляемости при растяжении с изгибом без учета касательных напряжений.

Ниже рассматриваются приспособляемость и предельный анализ идеально упругопластических призматических стержней при любой программе их повторно-переменного нагружения, в том числе логически связанными воздействиями [3]. Нагружение стержней производится по торцам, в соответствии с постановкой Сен–Венана [4], а боковая поверхность их свободна от нагрузки.

Задача сводится к проблеме бесконечномерного математического программирования. Решение получается в виде аналитических формул и в квадратурах. Предлагается алгоритм построения условий текучести или поверхностей взаимодействия обобщенных условий. В частном случае однократного нагружения находится решение для произвольной сложной деформации стержня, включая кручение.

Стержень с произвольным одно- или многосвязным сечением рассматривается в декартовой системе координат $Oxyz$. Ось z совпадает с продольной, а оси x и y – с главными центральными осями поперечного сечения. Обобщенные усилия в сечении образуют вектор

$$S = (N, Q_x, Q_y, T, M_x, M_y),$$

где N, Q_x, Q_y – продольная и поперечные силы; T, M_x, M_y – крутящий относительно оси z и изгибающие моменты относительно осей x и y. Они уравновешиваются нормальными σ_z и касательными τ_{yz} и τ_{zx} напряжениями, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$:

$$\begin{cases} \iint \sigma_z dA = N, \quad \iint \tau_{zx} dA = Q_x, \quad \iint \tau_{yz}\, dA = Q_y, \\ \iint (\tau_{zx} y - \tau_{yz} x)\, dA = T, \quad \iint \sigma_z y\, dA = M_x, \quad \iint \sigma_x x dA = M_y. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь интегрирование производится по всей площади A сечения $(dA = dx\,dy)$. Остальные компоненты тензора напряжений принимаются равными нулю, что соответствует плоскому напряженному состоянию элементарного объема, $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

Напряжения должны удовлетворять условию текучести, в качестве которого для материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, принимается соотношение Баландина–Гениева

$$\sigma_z^2 + 3(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + (R_c - R_t)\,\sigma_z - R_c R_t \leqslant 0, \tag{2}$$

где R_c, R_t – пределы текучести или прочности материала соответственно при сжатии и растяжении.

Если σ_{ze}, τ_{yze}, τ_{zxe} – циклические упругие напряжения, а ρ_z, ζ_{yz}, ζ_{zx} – постоянные во времени остаточные напряжения, то

$$\sigma_z = \sigma_{ze} + \rho_z, \quad \tau_{yz} = \tau_{yze} + \zeta_{yz}, \quad \tau_{zx} = \tau_{zxe} + \zeta_{zx}. \tag{3}$$

Упругие нормальные напряжения при изгибе и растяжении определяются в постановке Сен-Венана по элементарной формуле

$$\sigma_{ze} = N/A + M_x y/I_x + M_y x/I_y, \tag{4}$$

где I_x, I_y – осевые моменты инерции сечения.

Упругие касательные напряжения τ_{yze}, τ_{zxe} при сдвиге и кручении находятся путем решения краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона. Для практических расчетов средние значения касательных напряжений при сдвиге вычисляются по формулам Трикоми [4].

Выражения (1) справедливы и для упругих напряжений σ_{ze}, τ_{yze}, τ_{zxe}, поскольку остаточные напряжения в сечении самоуравновешены:

$$\begin{cases} \iint \rho_z dA = 0, \quad \iint \zeta_{zx} dA = 0, \quad \iint \zeta_{yz} dA = 0, \\ \iint (\zeta_{zx} y - \zeta_{yz} x)\, dA = 0, \quad \iint \rho_z y dA = 0, \quad \iint \rho_z x dA = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Программа циклического воздействия на конструкцию временных нагрузок в сумме с постоянными задается нормативными документами, в частности СНиП II-6–74. Решается задача нахождения невыгоднейших расчетных сочетаний нагрузок (НРСН) по отношению к условиям надежной работы системы (2). Для полученных НРСН вычисляются векторы усилий в сечении S_j, $j = 1, ..., J$, где J – количество НРСН.

В шестимерном евклидовом пространстве векторов S рассмотрим выпуклую оболочку D, натянутую на $\{S_j\}$. Она образует многогранное множество, или класс векторов усилий, вида

$$S \leqslant \sum_{j=1}^{J} \alpha_j S_j , \ \sum_{j=1}^{J} \alpha_j = 1, \ \alpha_j \geqslant 0, \ j = 1, ..., J . \tag{6}$$

Многогранник D содержит начало координат и всевозможные векторы усилий и их сочетания, которые могут квазистатически изменяться внутри D произвольным образом. Согласно теореме Блейха–Мелана [1, 4], элемент приспособится к нагружению, если после некоторого числа циклов в нем возникнут такие остаточные напряжения ρ_z, ζ_{yz}, ζ_{zx}, что в сумме с упругими они будут удовлетворять условию текучести (2). Таким образом, сформулированная задача о приспособляемости стержня в общем случае нагружения имеет, как правило, не единственное решение, если система уравнений и неравенств (1)...(6) непротиворечива. Следует отметить, что искомые функции ρ_z, ζ_{yz} и ζ_{zx} должны также удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия элементарного объема и условиям на поверхности (они здесь не приводятся, но учитываются при построении решения).

Пусть повторно-переменная нагрузка и, следовательно, усилия в сечении стержня заданы с точностью до одного параметра F_0, $S_j = F_0 \eta_j$, где векторы усилий η_j вычисляются, как и ранее, для НРСН. Тогда задача предельного равновесия стержня формулируется из предыдущей (1)...(6) при условии максимизации параметра нагрузки F_0:

$$F_0 \to \max , \ F_0 \geqslant 0 , \tag{7}$$

$$S_j = F_0 \eta_j . \tag{8}$$

Задача о предельном равновесии стержня при однократном нагружении оказывается частным случаем задачи (1)...(8) для $J = 1$, при этом в качестве основных переменных выбираются суммарные напряжения (3).

Для решения задачи (1)...(8) предлагается приближенный подход [3], при котором нелинейные ограничения (2) заменяются линейными за счет пренебрежения в области малых касательных напряжений соответствующими остаточными напряжениями ($\zeta_{yz} = \zeta_{zx} = 0$). Возникающая при этом погрешность обеспечивает запас прочности тела, а дифференциальные уравнения равновесия и условия на его боковой поверхности в рамках принятых допущений удовлетворяются тождественно. Эти допущения имеют ясную механическую интерпретацию, постулируя при определенных программах нагружения отсутствие остаточных касательных напряжений в конструкции вплоть до ее предельного состояния. Тогда квадратичное неравенство (2) заменяется линейными двусторонними ограничениями

$$-\varphi_1 \ -\rho_z \equiv -\sigma_{ze} - \rho_z + R'_c \leqslant 0, \ -\varphi_2 + \rho_z \equiv \sigma_{ze} + \rho_z - R'_z \leqslant 0, \quad (9)$$

где R'_c, R'_t – корни уравнения (2), зависящие от касательных напряжений:

$$R'_c = 0{,}5(R_z - R_c - D_1), \ R'_t = 0{,}5(R_t - R_c + D_1), \quad (10)$$

$$D_1 = [(R_t + R_c)^2 - 12(\tau^2_{yze} + \tau^2_{zxe})]^{1/2}, \quad (11)$$

их модули представляют собой эквивалентные пределы текучести или прочности.

Переменные σ_{ze}, τ_{yze} и τ_{zxe} в задаче (1), (3)...(11) можно исключить, переходя в неравенствах (9) к минимальным "упругим" запасам φ_1 и φ_2 с учетом условий (1), (4), (6) и решения краевых задач [4]. При естественных предпосылках доказывается, что экстремальные запасы φ_1 и φ_2 выражаются через j-е вершины многогранника усилий D (6), определяемые для НРСН. Тогда неравенства (9) записываются следующим образом:

$$\min_{j=\overline{1,J}} (\sigma_{zej} - R'_{tj}) + \rho_z \leqslant 0, \quad \min_{j=\overline{1,J}} (R'_{cj} - \sigma_{zej}) - \rho_z \leqslant 0, \quad (12)$$

где индекс j показывает, что напряжения вычисляются для j-го вектора усилий S_j.

Если при повторных нагружениях элемента касательные напряжения остаются постоянными или изменяются независимо от нормальных, условия текучести (12) выражаются через экстремальные значения напряжений σ^-_{ze}, σ^+_{ze}:

$$R'_c \leqslant \sigma^-_{ze} + \rho_z, \quad \sigma^+_{ze} + \rho_z \leqslant R'_z, \quad (13)$$

которые находятся по формулам

$$\sigma^{\mp}_{ze} = \genfrac{}{}{0pt}{}{\min}{\max}_{j=\overline{1,J}} \left\{ \left(\frac{N_j}{A} + \frac{M_{xj}\, y}{I_x} + \frac{M_{yi}\, x}{I_y} \right) F_0; \ 0 \right\}. \quad (14)$$

Экстремальные касательные напряжения для вычисления R'_c, R'_t получаются из аналогичных соотношений.

Сформулированная задача бесконечномерного линейного программирования (5), (7), (10)...(12) или (5), (7), (10), (11), (13), (14) имеет решения двух типов, соответствующие режимам знакопеременной текучести или прогрессирующего разрушения стержня. В первом решении оба неравенства (12) и (13) оказываются активными для одних и тех же точек (x, y) сечения. Исключая остаточные напряжения ρ_z, получим

$$\min_{j=\overline{1,J}} (\sigma_{zej} - R'_{tj}) + \min_{j=\overline{1,J}} (R'_{cj} - \sigma_{zej}) \leqslant 0,$$

или

$$\sigma^+_{ze} - \sigma^-_{ze} - R'_t + R'_c \leqslant 0,$$

откуда с учетом (14) находится соотношение между обобщенными усилиями для режима знакопеременной текучести.

Во втором решении для каждой из областей сечения активно только одно из неравенств (12) или (13). Здесь предлагается использовать обратный метод решения, задаваясь положением нулевой линии, разделяющей сечение на области с активными верхними или нижними ограничениями. Из условий (13) исключаются для каждой из областей остаточные напряжения ρ_z, которые с учетом формул (12) подставляются в первое, пятое и шестое уравнения системы (5). В результате их интегрирования формируются три линейных алгебраических уравнения, откуда находятся искомые соотношения между обобщенными усилиями для режима прогрессирующего разрушения стержня. Поверхность взаимодействия обобщенных усилий, следовательно, состоит из двух областей, соответствующих рассмотренным режимам.

Аналогично получаются зависимости и для предельного равновесия стержня при однократном нагружении произвольного вида.

Найденные решения справедливы только для наиболее часто встречающихся в практике случаев нагружений стержней, когда суммарные "упругие" касательные напряжения не превосходят их предельного значения, которое из (11) для принятого условия текучести (2) определяется неравенством

$$D_1^2 \geqslant 0 \text{ или } \tau_{yze}^2 + \tau_{zxe}^2 \leqslant (R_c + R_t)^2/12. \tag{15}$$

В остальной части области нагружения решения получаются с помощью другой линеаризации условия текучести (2), при которой, например, пренебрегают остаточными напряжениями ρ_z, ζ_{yz} или ζ_{zx}. Однако более простой и достаточно надежный способ заключается в аппроксимации поверхности взаимодействия обобщенных усилий за пределами области (15) поверхностями первого или второго порядка с использованием в качестве опорных точек на осях координат известных точных решений для случаев сдвига и кручения.

В качестве примера приведем решение задачи построения поверхности взаимодействия усилий тонкостенной трубы при кручении с изгибом или растяжением, численные результаты для которой получены по предлагаемой методике В.П. Мурашко. Компоненты вектора повторно-переменной нагрузки S здесь изменяются произвольным образом от нуля до ограниченных сверху независимых пределов, и, следовательно, многогранник усилий D представляет собой прямоугольный параллелепипед. Отношение внутреннего диаметра трубы к наружному принималось равным 0,94, отношение пределов текучести при сжатии и растяжении $R_c/R_t = 0{,}75$.

Приведенный крутящий момент $T_{red} = T/T_0$, изгибающий момент $M_{x\,red} = M_x/M_{x0}$ и продольная сила $N_{red} = N/N_0$ (где T_0, M_{x0} и N_0 – предельные значения соответствующих усилий в сечении) изменяются следующим образом:

T_{red}	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1
$M_{x\,red}$	1	0,977	0,911	0,79	0,542	0,332	0
N_{red}	1	0,982	0,928	0,829	0,63	0,472	0

В данном случае результаты для отнулевого повторно-переменного и однократного нагружений совпадают.

Результаты расчета при $R_c/R_t = 1$ оказались весьма близкими полученным другим способом [5] для однократного нагружения – отклонение по норме не более 3,3 %.

Отметим, что все найденные численные решения хорошо описываются известной зависимостью

$$\| S_{red} \| = (S^{\mathrm{т}}_{red} S_{red})^{1/2} \approx 1,$$

т. е. "евклидова" норма вектора приведенных усилий S_{red} примерно равняется единице (символ "т" означает транспонирование). Эта формула допускает погрешность для кручения с изгибом при R_c/R_t = 0,75–4 %, при R_c/R_t = = 1 – 0,1 %, для кручения с растяжением при R_c/R_t = 0,75–2,3 %.

Изложенную методику можно применить в задачах расчета сплошных стержней в постановке Альманзи–Мичелла (при действии нагрузки на боковой поверхности тела), а также на расчеты тонкостенных стержней, пластин и оболочек методом сосредоточенных пластических деформаций. Полученные соотношения позволяют использовать результаты теории приспособляемости в практике проектирования упругопластических силовых конструкций в общем случае их повторно-переменного или однократного нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чирас А.А. Математические модели анализа и оптимизации упругопластических систем. – Вильнюс, 1982. – 112 с. 2. Гохфельд Д.А., Чернявский О.Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях. – М., 1979. – 263 с. 3. Алявдин П.В. О соотношениях для обобщенных усилий в задачах приспособляемости стержней, пластинок и оболочек // Актуальные проблемы прочности: Тез. докл. – Тарту, 1985. – С. 146–147. 4. Лурье А.И. Теория упругости. – М., 1970. – 940 с. 5. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия.– М., 1949. – 280 с.

УДК 624.075.22

В.П. МУРАШКО, П.В. АЛЯВДИН,
канд. техн. наук (БПИ)

ПРЕДЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НАЧАЛЬНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ

Рассматривается задача определения однопараметрической предельной нагрузки на рамную конструкцию с учетом реальных условий ее работы и в соответствии с требованиями нормативных документов [1]. Материал считается идеально упругопластическим, стержни системы обладают начальными несовершенствами (НН), конструкция рассчитывается по деформированной схеме [2].

НН в виде геометрических отклонений осей элементов от прямолинейной формы здесь подразделяются по характеру проявления в конструкции на два типа: естественные и монтажные (ННЕ и ННМ). Соответственно ННЕ не вызывают, а ННМ вызывают начальные усилия в ненагруженной системе. ННЕ описываются n-мерным вектором Δ_n, ННМ – k-мерным вектором Δ_a, где n -