$$\frac{1}{K_R} = 2S_{1111} + S_{3333} + 2(2S_{1133} + S_{1122}),$$

$$\frac{1}{\mu_R} = \frac{1}{15}[4(2S_{1111} + S_{3333} - 2S_{1133} - S_{1122}) +$$

$$+ 3(8S_{2323} + 4S_{1212})],$$

$$M_R = \frac{1}{3}(2M_{11}S_{1111} + M_{33}S_{3333}).$$

Таким образом, с использованием эффективных упругих постоянных уравнения (1) можно записать в виде

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}M\zeta, \quad P = Me_{ii} + \alpha\zeta, \tag{7}$$

где $\lambda = K - 2/3\ \mu$.

Формулы (7) позволяют строить эффективные приближенные алгоритмы для определения напряженно-деформированного состояния анизотропных пористо-упругих жидконасыщенных сред, например с помощью метода граничных интегральных уравнений [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. Mechanics of Deformation and Acoustic propagation in Porous Media // J. of Appl. Phys. – 1962. – Vol. 33, N 4. – P. 1462–1493. 2. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. – 1941. – Vol. 12, N 2. – P. 404–408. 3. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М., 1974. – 400 с. 4. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М., 1984. – 336 с. 5. Александров К.С. Средние значения тензорных величин // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 164, № 4. – С. 800–804. 6. Мартыненко М.Д., Селявко В.В. Метод граничных интегральных уравнений для задач контактного взаимодействия пористо-упругих тел // Трение, износ и смазочные материалы: Тр. междунар. науч. конф. – М., 1985. – Т. 1. – С. 45–49.

УДК 621.791.76:621.7.044.2:539.378.3.001.57

А.Х. КИМ, д-р техн. наук,
Н.Н. КОРЖЕНЕВСКАЯ, канд. техн. наук,
Г.Н. АЛЕХНОВИЧ, Г.С. СОКОЛОВСКИЙ (БПИ)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ СОЕДИНЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ СВАРКОЙ ВЗРЫВОМ

Развитие современной техники характеризуется возрастанием требований к рабочим характеристикам конструкционных материалов. Это обусловливает необходимость разработки новых материалов и улучшения свойств существующих. Большие перспективы имеют комбинированные материалы, состоящие из нескольких слоев разнородных металлов.

Свойства многослойных материалов в значительной мере зависят от способа изготовления, одним из которых является сварка взрывом. Установлено, что способом сварки неразъемное соединение получается в результате пластического деформирования металлов при импульсном нагружении [1].

Задача об экспериментальном определении напряжений в сплошной среде при высокоскоростном и кратковременном нагружении в настоящее время практически не решена. Поэтому теоретическая постановка задачи расчета напряжений в зоне контакта свариваемых листов является актуальной. Ее решение позволит найти пути управления процессом сварки взрывом.

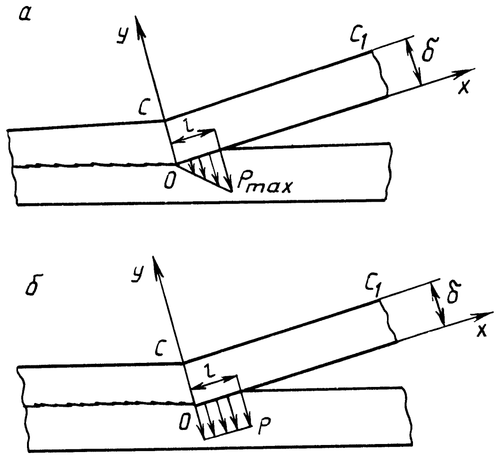

Рис. 1. Распределение нормальных давлений в зоне контакта свариваемых пластин

При разработке математической модели рассматриваемого процесса в соответствии с экспериментальными данными принимается, что давление в зоне контакта распределено равномерно (рис. 1, *б*) или по линейному закону (рис. 1, *а*) [2]. Толщина листа δ мала по сравнению с его шириной, и можно считать, что во всех плоскостях, параллельных плоскости xOy, картина распределения напряжений одна и та же. Свариваемые листы рассматриваем как сплошные среды с разными механическими характеристиками (пределами пластичности).

Дифференциальные уравнения равновесия среды в случае плоского напряженного состояния имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} &= \rho_0 a_x\,, \\ \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} &= \rho_0 a_y\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где ρ_0 – плотность материала; a_x и a_y – проекции вектора ускорения на оси x и y.

В данной задаче можно положить, что $a_x = 0$, а a_y является функцией от x. Эта функция неизвестна, но, если пренебречь жесткостью листа, можно считать, что a_y изменяется приблизительно так же, как P_{yy}.

Уравнения (1), кроме a_y, содержат неизвестные P_{xx}, P_{yy} и P_{xy}. Для их решения необходимо сделать предположение относительно характера деформаций. Согласно обобщенному закону Гука,

$$P_{xx} = E\epsilon_{xx} + \sigma P_{yy},$$

где E – модуль Юнга; ϵ_{xx} – относительная деформация (переменная величина); σ – коэффициент Пуассона.

Левее точки O (рис. 1) листы сварены, вследствие этого в точке O будет наибольший Пуассонов эффект, т. е. наибольшее значение $\partial P_{xx}/\partial x$. По мере удаления от точки O скорость изменения P_{xx} постепенно уменьшается и при $x = l$ $\partial P_{xx}/\partial x = 0$.

Допустим, что

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} = \frac{l^2 - x^2}{l^2} \frac{\partial P_{yy}}{\partial x} . \tag{2}$$

Из уравнения (1) при $a_x = 0$ получаем

$$P_{xy} = - \int \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} dy + f(x) , \tag{3}$$

где $f(x)$ – произвольная функция от x.

Из уравнений (2) и (3) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{l^2 - x^2}{l^2} \frac{\partial P_{yy}}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} = 0. \tag{4}$$

Положив

$$P_{yy} = X(x)\, Y(y) , \tag{5}$$

из уравнений (2), (3) и (4) получим

$$Y_n = C_{1n} \sin(k_n y) + C_{2n} \cos(k_n y).$$

Введя новую переменную $\eta = x/l$, для функции $X(\eta)$ имеем уравнение Лежандра

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1 - \eta^2)\frac{dX}{d\eta}\right] + (n + 1)nX = 0.$$

В соответствии с уравнением (5)

$$P_{yy} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{1n} \sin(k_n y) + C_{2n} \cos(k_n y)\right] X_n , \tag{6}$$

где $k_n = 1/l \sqrt{n(n+1)}$, а X_n – полином Лежандра.

Если давление P_{yy} в зоне контакта свариваемых листов (при $y = 0$) изменяется по линейному закону с коэффициентом пропорциональности γ, коэффициенты C_{2n} ряда можно определить из уравнения

$$\gamma\eta = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} X_n ,$$

откуда

$$C_{2n} = \frac{2n + 1}{2} \gamma_0 \int_0^1 \eta X_n d\eta .$$

Из условия $P_{yy} = 0$ при $y = 0$, $x = 0$ получаем

$$C_{1n} = - \frac{C_{2n}\cos(k_n\delta)}{\sin(k_n\delta)} ,$$

а из условия $P_{xy} = 0$ при $y = \delta$ – выражение произвольной функции $f(\eta)$ в уравнении (3).

В результате касательные напряжения

$$P_{xy} = \frac{1}{l}(1-\eta^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dX_n}{d\eta} k_n \Big\{ C_{2n} [\sin(k_n\delta) -$$

$$- \sin(k_n y)] - C_{1n} [\cos(k_n\delta) - \cos(k_n y)] \Big\} . \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) позволяют определить нормальные и касательные напряжения в зоне контакта листов при сварке взрывом и теоретически рассчитать процесс сварки в зависимости от размеров и механических свойств листов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каракозов Э.С. Соединение металлов в твердой фазе. – М., 1976. – 263 с.
2. Кудинов В.М., Коротеев А.Я. Сварка взрывом в металлургии. – М., 1978. – 165 с.

УДК 539.389.3+624.046+621.81

П.В. АЛЯВДИН, канд. техн. наук
(БПИ)

ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ НАГРУЖЕНИЯ

Предельный анализ трехмерных систем при простых программах повторно-переменного нагружения изложен во многих работах, например в [1, 2]. Однако даже для основных несущих элементов конструкций в виде призматических стержней до настоящего времени решены только частные вопросы теории их приспособляемости при растяжении с изгибом без учета касательных напряжений.

Ниже рассматриваются приспособляемость и предельный анализ идеально упругопластических призматических стержней при любой программе их повторно-переменного нагружения, в том числе логически связанными воздействиями [3]. Нагружение стержней производится по торцам, в соответствии с постановкой Сен–Венана [4], а боковая поверхность их свободна от нагрузки.

Задача сводится к проблеме бесконечномерного математического программирования. Решение получается в виде аналитических формул и в квадратурах. Предлагается алгоритм построения условий текучести или поверхностей взаимодействия обобщенных условий. В частном случае однократного нагру-