

Развитие и приложение теории качения к динамике систем с деформируемым колесом // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 1982. – Вып. 9. – С. 95–106. 3. Левин М.А. Некоторые результаты исследования реакций связей деформируемого колеса // Теоретическая и прикладная механика: Тематический сборник. – Минск, 1973. – С. 3–17. 4. Левин М.А. Определение кинематических коэффициентов в теории качения // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 1979. – Вып. 6. – С. 53–63.

УДК 621.01

С.Е.КАРПОВИЧ, канд. техн. наук,  
А.Я.ГОЛЬБИН (МРТИ)

## ФОРМАЛИЗОВАННЫЙ КИНЕТОСТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГОЛОНОМНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Проблеме формализованного аналитического описания основных задач исследования кинематики и динамики механизмов посвящены работы многих авторов, в частности работы [1, 2, 3]. Наиболее значительные результаты получены Ю.Ф. Мирошкиным, который предложил новый метод исследования структуры и кинематики любых плоских и пространственных механизмов с голономными связями. Метод позволяет представлять в единой форме уравнения в обобщенных координатах, определяющих положения звеньев относительно друг друга, а также на их основе формировать дифференциальные уравнения движения механизма. Он основан на обходе координатным трехгранником всех звеньев кинематической цепи, при этом переход от одного шарнира к другому рассматривается как преобразование систем координат, зависящее от конструктивных параметров звена, а переход от звена к звену — как преобразование координатных систем, определяющих относительное положение звеньев.

Цель настоящего исследования — обобщение методов анализа голономных кинематических цепей на решение задач кинетостатики. Представлен метод кинетостатического исследования, позволяющий формализовать составление соответствующих уравнений и их решение в форме, удобной для выполнения расчетов на ЭВМ. Математическим аппаратом служит метод линейных пространств винтов [1, 2, 3]. Кинематические и силовые винты рассматриваются как векторы шестимерного линейного вещественного пространства. Разработанный метод интерпретируется в статье на примере промышленного робота ПР-10 (рис. 1).

Разработанная авторами теория кинетостатики кинематической пары обобщается на концепции [3], согласно которой в окрестности данной точки конфигурации пары возможное перемещение раскладывается по базису

$$\delta S = \sum_{i=1}^r q_i \delta S_i^0,$$

где  $r$  — размерность линейного вещественного пространства  $\{\delta S\}$ , образованного множеством винтов возможных перемещений в паре, равная числу степе-

ней свободы в относительном движении звеньев пары,  $q_i$  —  $i$ -я обобщенная координата.

Из плюккеровых координат базисных винтов пространства  $\{\delta S\}$  формируется матрица подвижностей пары

$$[\delta S] = (\delta S_{\nu i}^0),$$

где  $\nu$  — номер плюккеровой координаты ( $1 \leq \nu \leq 6$ ),  $i$  — номер базисного винта ( $1 \leq i \leq r$ ).

Аналогично возможная реакция связей в кинематической паре раскладывается по своему базису

$$Q = \sum_{j=1}^k \alpha_j Q_j^0,$$

где  $k$  — размерность линейного вещественного пространства  $\{Q\}$ , образованного множеством винтов возможных реакций связей в паре, равная классу пары, для пар  $A, B, C$  (см. рис. 1)  $k = 5$ ;  $\alpha_j$  —  $j$ -я обобщенная реакция в паре.

Из плюккеровых координат базисных винтов пространства  $\{Q\}$  формируется матрица реакций связей пары

$$[Q] = (Q_{\nu j}^0),$$

а из матрицы скоростей и реакций пары — обобщенная матрица

$$T = [[\delta S] [Q]],$$

характеризующая локальную кинематику, статику и кинестатику пары.

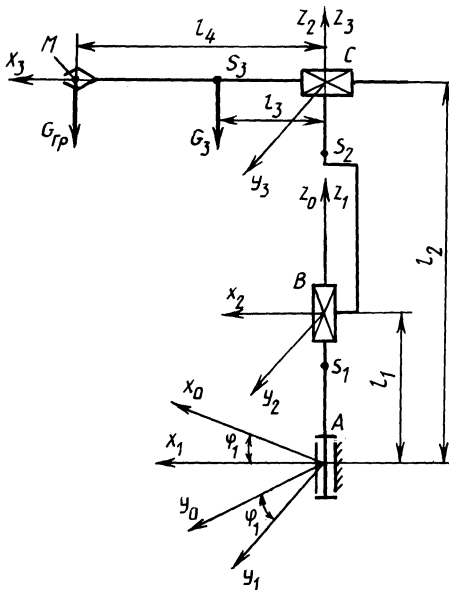


Рис. 1. Исполнительный механизм манипулятора ПР-10

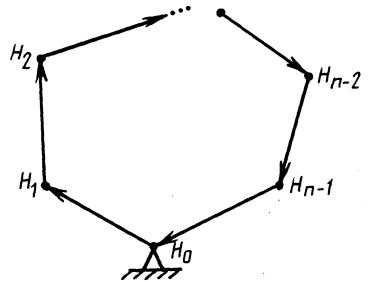


Рис. 2. Граф простого контура

Рассмотрим силовой расчет простого контура, ориентированный граф которого представлен на рис. 2. Здесь  $H_\rho$  ( $\rho = \overline{0, n}$ ) – множество вершин графа, определяющих звенья контура; кинематические пары характеризуются множеством ребер  $H_\rho H_{\rho+1}$  этого графа.

Уравнение равновесия звена  $H_\rho$  в винтовой форме будет иметь вид [3]

$$Q_{\rho-1, \rho} - Q_{\rho, \rho+1} = -(\Gamma_\rho + \Phi_\rho), \quad (1)$$

$$\rho = \overline{0, n}, H_0 \equiv H_n,$$

где  $Q_{\rho-1, \rho}$  и  $Q_{\rho, \rho+1}$  – винты реакций в парах, образованных соответственно звеньями  $H_{\rho-1}$ ,  $H_\rho$  и  $H_\rho$ ,  $H_{\rho+1}$ ;  $\Gamma_\rho$  – винт внешних силовых факторов, действующих на звено  $H_\rho$ ;  $\Phi_\rho$  – винт сил инерции этого звена.

С учетом разложения по базисам линейных пространств реакций выражение (1) запишем в виде

$$\sum_{j_{\rho-1, \rho}=1}^{k_{\rho-1, \rho}} \alpha_{j_{\rho-1, \rho}} Q_{j_{\rho-1, \rho}}^0 - \sum_{j_{\rho, \rho+1}=1}^{k_{\rho, \rho+1}} \alpha_{j_{\rho, \rho+1}} Q_{j_{\rho, \rho+1}}^0 = -(\Gamma_\rho + \Phi_\rho). \quad (2)$$

( $0 \leq \rho \leq n$ )

С учетом выражения (1) запишем уравнения равновесия звеньев манипулятора ПР-10 (см. рис. 1) в винтовой форме:  $Q_{23} = -(\Gamma_3 + \Phi_3)$  – для звена 3;  $Q_{12} - Q_{23} = -(\Gamma_2 + \Phi_2)$  – для звена 2;  $Q_{01} - Q_{12} = -(\Gamma_1 + \Phi_1)$  – для звена 1. На основании соотношения (2) осуществим разложение винтов реакций  $Q_{\rho, \rho+1}$  и сил  $\Gamma_\rho$  и  $\Phi_\rho$  по линейному базису шлюккеровых координат. В результате винты реакций в парах  $A, B, C$  запишутся в виде:

$$[Q_{01}]^T = [R_{Ax} R_{Ay} R_{Az} M_{Ax} M_{Ay} M_1],$$

$$[Q_{12}]^T = [R_{Bx} R_{By} P_B M_{Bx} M_{By} M_{Bz}],$$

$$[Q_{23}]^T = [P_C R_{Cy} R_{Cz} M_{Cx} M_{Cy} M_{Cz}],$$

а винты  $\Gamma_\rho$  и  $\Phi_\rho$  сил тяжести и инерции – в виде:

$$[\Gamma_1 + \Phi_1]^T = [0 \ 0 \ -G_1 \ 0 \ 0 \ \epsilon_1 I_{z_1}],$$

$$[\Gamma_2 + \Phi_2]^T = [0 \ 0 \ -(G_2 + m_2 a) \ 0 \ 0 \ \epsilon_1 I_{z_2}],$$

$$[\Gamma_3 + \Phi_3]^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6],$$

$$u_1 = -m_3 (a_3 - \omega_1^2 b_3) - m_{\text{гр}} (a_3 - \omega_1^2 b_4),$$

$$u_2 = m_3 (\epsilon_1 b_3 + 2\omega_1 v_3) + m_{\text{гр}} (\epsilon_1 b_4 + 2\omega_1 v_3),$$

$$u_3 = -(m_3 + m_{\text{гр}}) a_2 - G_3 - G_{\text{гр}}, \quad u_4 = 0,$$

$$u_5 = m_3 a_2 b_3 + m_{\text{гр}} a_2 b_4 + G_3 b_3 + G_4 b_4,$$

$$u_6 = (I_{z_3} + I_{z_{\text{гр}}}) \epsilon_1 + m_3 (\epsilon_1 b_3 + 2\omega_1 a_3) b_3 + m_{\text{гр}} (\epsilon_1 b_4 + 2\omega_1 a_3),$$

где  $M_1, P_B$  и  $P_C$  — движущий момент и движущие силы приводов соответственно.

Матрицы преобразования винтов реакций в кинематических парах  $A, B$  и  $C$  на основании данных [1, 3] имеют вид:

$$M_A = \begin{bmatrix} c\varphi_1 & -s\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s\varphi_1 & c\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s\varphi_1 & c\varphi_1 & 0 & c\varphi_1 & -s\varphi_1 & 0 \\ c\varphi_1 & -s\varphi_1 & 0 & s\varphi_1 & c\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_B = M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $c\varphi_1 = \cos \varphi_1$ ,  $s\varphi_1 = \sin \varphi_1$ .

Возможные реакции связей, передаваемые от стойки  $H_0$  к звену  $H_n$ , лежат в пространстве

$$\{Q_{0,n}\} = \bigcap_{\rho=0}^{n-1} \{Q_{\rho,\rho+1}\},$$

где  $Q_{\rho,\rho+1}$  — пространство реакций пары, образованной звеньями  $H_\rho$  и  $H_{\rho+1}$ . Если все пары цепи подчинены идеальным связям, пространства  $\{\delta S_{0,n}\}, \{S_{0,n}\}$  и  $\{Q_{0,n}\}$  взаимны [3, 4].

Пространство  $\{Q_{0,0}\}$  назовем пространством избыточных связей. Такое определение вытекает из следующего соображения. Мысленно разомкнем контур в паре, образованной звеньями  $H_\rho$  и  $H_{\rho+1}$ . Первая часть цепи накладывается на звено  $H_\rho$  связи, определяемые пространством  $\{Q_{0,\rho}\} = \bigcap_{\epsilon=0}^{\rho-1} \{Q_{\epsilon,\epsilon+1}\}$ , вторая — связи на звено  $H_{\rho+1}$ , определяемые пространством  $\{Q_{0,\rho+1}\} = \bigcap_{\epsilon=\rho+1}^{n-1} \{Q_{\epsilon,\epsilon+1}\}$ . Пара, образованная звеньями  $H_\rho$  и  $H_{\rho+1}$ , включает связи, лежащие в пространстве  $\{Q_{0,\rho}\} \cap \{Q_{\rho,\rho+1}\} \cap \{Q_{0,\rho+1}\} = \bigcap_{\epsilon=0}^{n-1} \{Q_{\epsilon,\epsilon+1}\}$ .

Если же размыкание контура осуществить в паре, образованной звеньями  $H_n$  и  $H_0$ , получим пространство избыточных связей контура  $\{Q_{0,0}\}$ . Действительно,

$$\{Q_{0,n}\} \cap \{Q_{n,0}\} = \left( \bigcap_{\rho=0}^{n-1} \{Q_{\rho,\rho+1}\} \right) \cap \{Q_{n,0}\} = \{Q_{0,0}\}.$$

Однородная система, индуцированная системой (2), имеет вид

$$\sum_{j_{\rho-1,\rho}=1}^{k_{\rho-1,\rho}} a_{j_{\rho-1,\rho}} Q_{j_{\rho-1,\rho}}^0 - \sum_{j_{\rho,\rho+1}=1}^{k_{\rho,\rho+1}} a_{j_{\rho,\rho+1}} Q_{j_{\rho,\rho+1}}^0 = [0], \quad (3)$$

(0 ≤ ρ ≤ n).

Обозначим пространство решений системы уравнений (3) через {A}. Покажем, что {A} изоморфно пространству избыточных связей {Q<sub>0,0</sub>} контура. Для этого рассмотрим пространство решений системы уравнений (3) для одного звена H<sub>ρ</sub>. Поскольку пространство решений системы однородных уравнений (3) для данного ρ изоморфно пространству {Q<sub>ρ-1,ρ</sub>} ∩ {Q<sub>ρ,ρ+1</sub>}, для всех звеньев рассматриваемого контура получим:

$$\begin{aligned} Q_{0,n} &\in \{Q_{0,1}\} \cap \{Q_{1,2}\}, \\ Q_{0,n} &\in \{Q_{1,2}\} \cap \{Q_{2,3}\}, \\ &\dots \\ Q_{0,n} &\in \{Q_{n-1,n}\} \cap \{Q_{n,0}\}. \end{aligned}$$

Следовательно, Q<sub>0,n</sub> ∈ {Q<sub>ρ,ρ+1</sub>} при 1 ≤ ρ ≤ (n - 1) и поэтому Q<sub>0,n</sub> ∈ {Q<sub>0,0</sub>}. Тем самым доказывается, что пространство решений системы уравнений (3) изоморфно пространству избыточных связей контура {Q<sub>0,0</sub>}. Вектор решения этих уравнений запишем в виде

$$A = \left[ \overbrace{a_{1,0,1} \quad a_{2,0,1} \quad \dots \quad a_{k_{0,1}}}^{\bar{a}_{0,1}} \quad \dots \quad \overbrace{a_{1,n-1,0} \quad a_{2,n-1,0} \quad \dots \quad a_{k_{n-1,0}}}^{\bar{a}_{n-1,0}} \right].$$

Секция  $\bar{a}_{0,1}$  этого вектора определяет винт

$$Q = \sum_{j_{0,1}=1}^{k_{0,1}} a_{j_{0,1}} Q_{j_{0,1}}^0,$$

а из уравнений (3) следует, что

$$Q = \sum_{j_{\rho,\rho+1}=1}^{k_{\rho,\rho+1}} a_{j_{\rho,\rho+1}} Q_{j_{\rho,\rho+1}}^0, \quad 1 \leq \rho \leq (n-1).$$

Матрица коэффициентов системы уравнений (3) имеет блочное строение [4]:

$$\Omega = \begin{bmatrix} [Q_{0,1}] - [Q_{1,2}] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [Q_{1,2}] - [Q_{2,3}] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [Q_{n-2,n-1}] - [Q_{n-1,0}] \end{bmatrix}$$

где [Q<sub>ρ,ρ+1</sub>] – матрица реакций пары, образованной звеньями H<sub>ρ</sub> и H<sub>ρ+1</sub>.

Рассмотрим сложную многоконтурную кинематическую цепь. Пусть ее структура описывается графом с n-вершинами, p-ребрами и c = p - n + 1-фундаментальными контурами. Матрицей фундаментальных контуров графа

называют матрицу  $B_{c \times p}$ , в которой  $b_{ij} = 1$ , если  $j$ -е ребро в  $i$ -м фундаментальном контуре, и  $b_{ij} = 0$  в противном случае. Матрицей инциденций ориентированного графа называют матрицу  $A_{n \times p}$ , в которой  $a_{ij} = 1$ , если дуга  $j$  входит в  $i$ -ю вершину;  $a_{ij} = -1$ , если  $j$ -я дуга выходит из  $i$ -й вершины, и  $a_{ij} = 0$ , если  $j$ -я дуга не инцидентна  $i$ -й вершине.

Благодаря такому описанию структуры система уравнений силового расчета сложной кинематической цепи [3]

$$\sum_{\sigma_r^+ = 1}^{\lambda_r^+} \sum_{j_{\sigma_r^+} = 1}^k a_{j_{\sigma_r^+}} Q_{j_{\sigma_r^+}}^0 - \sum_{\sigma_r^- = 1}^{\lambda_r^-} \sum_{j_{\sigma_r^-} = 1}^k a_{j_{\sigma_r^-}} Q_{j_{\sigma_r^-}}^0 = -(\Gamma_\rho + \Phi_\rho) \quad (1 \leq r \leq l) \quad (4)$$

может быть записана в виде

$$\sum_{\sigma=1}^p a_{\tau\sigma} \sum_{j_\sigma=1}^k a_{j_\sigma} Q_{j_\sigma}^0 = -(\Gamma_\tau + \Phi_\tau), \quad (1 \leq \tau \leq l) \quad (5)$$

где  $a_{\tau\sigma}$  — элемент матрицы инциденций ориентированного графа цепи.

Матрица системы (5) разрежена и имеет блочное строение, отвечающее структуре матрицы инциденций; блоками служат матрицы реакций кинематических пар. Блок-строка матрицы, отвечающая стойке механизма, может быть отброшена ввиду ее линейной зависимости от других строк. Уравнения (4) или (5) являются основными уравнениями для силового расчета пространственных многоконтурных механизмов.

Итак, использование теории линейных пространств и графов дает возможность осуществить полную формализацию построения алгоритмов кинестатических расчетов голономных кинематических цепей, что позволяет непосредственно на ЭВМ формировать расчетные уравнения кинестатики и решать их численно.

В качестве примера рассмотрим расчет механизма манипулятора (см. рис. 1) при следующих исходных данных:  $I_{z_1} = 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $I_{z_2} = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $I_{z_3} = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $I_{z_{\text{гр}}} = 0,05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $m_1 = 10 \text{ кг}$ ;  $m_2 = 15 \text{ кг}$ ;  $m_3 = 12 \text{ кг}$ ;  $m_{\text{гр}} = 8 \text{ кг}$ . Груз массой  $m_{\text{гр}}$  перемещается из положения, соответствующего обобщенным координатам  $\varphi_1 = 120^\circ$ ,  $b_1 = 0,5 \text{ м}$ ,  $b_2 = 1 \text{ м}$ ,  $b_3 = 0,3 \text{ м}$ ,  $b_4 = 0,5 \text{ м}$ , с начальными скоростями  $\omega_1 = 0,4 \text{ рад/с}$ ,  $v_2 = 0,2 \text{ м/с}$ ,  $v_3 = 0,28 \text{ м/с}$  и ускорениями  $\epsilon_1 = \dot{\omega}_1 = 0,03 \text{ рад/с}^2$ ,  $a_2 = 0,04 \text{ м/с}^2$ ,  $a_3 = 0,06 \text{ м/с}^2$ . Необходимо выполнить кинестатический расчет манипулятора в положении, соответствующем обобщенным координатам  $\varphi_1 = 180^\circ$ ,  $b_1 = 1 \text{ м}$ ,  $b_2 = 1,5 \text{ м}$ ,  $b_3 = 1 \text{ м}$ ,  $b_4 = 1,2 \text{ м}$ .

Решение задачи осуществлялось на ЭВМ ЕС-1022 по программе, разработанной авторами статьи на основании описанного выше алгоритма. В зависимости от числа звеньев и контуров механизма, порядкового номера звена автоматическим формируется его уравнение равновесия в винтовой форме.

В результате решения системы линейных уравнений (4) получены следующие реакции:

$$R_{Ax} = -13,4 \text{ Н}; R_{Ay} = 18,1 \text{ Н}; R_{Az} = 445 \text{ Н}; M_{Ax} = 14,5 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{Ay} = 222,6 \text{ Н}\cdot\text{м}; R_{Bx} = -13,4 \text{ Н}; R_{By} = 18,1 \text{ Н}; M_{Bx} = -3,4 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{By} = 222,6 \text{ Н}\cdot\text{м}; M_{Bz} = -9,6 \text{ Н}\cdot\text{м}; R_{Cy} = 27,7 \text{ Н}; R_{Cz} = 446,2 \text{ Н};$$

$$M_{Cx} = 0; M_{Cy} = 213,6 \text{ Н}\cdot\text{м}; M_{Cz} = -19,8 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Момент привода в паре  $A$   $M_1 = M_{Az} = 31,9 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , движущая сила в паре  $B$   $P_B = R_{Bz} = -346,15 \text{ Н}$ , в паре  $C$   $P_C = R_{Cx} = 13,4 \text{ Н}$ . Время решения задачи на ЭВМ составило 3,5 мин.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения. — М., 1978. — 290 с.
2. Морочкин Ю.Ф. Основы аналитической теории механизмов // Тр. ин-та машиноведения. — 1954. — Вып. 54. — С. 25–51.
3. Карпович С.Е., Гольбин А.Я. Вопросы аналитической теории структуры кинематических пар и цепей механизмов РЭА // Механика радиоэлектронных и вычислительных устройств. — Таганрог, 1982. — Вып. 2. — С.56–62.
4. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. — М., 1977. — 268 с.

УДК 548.0:532.783

В.Б. НЕМЦОВ, канд. техн. наук  
(БТИ)

### ФЛУКТУАЦИИ ТЕНЗОРНОГО ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА В НЕОДНОРОДНЫХ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ И ИХ РАВНОВЕСНАЯ ОРИЕНТАЦИОННАЯ УПРУГОСТЬ

Ориентационная упорядоченность является определяющим свойством нематических жидких кристаллов (НЖК). При феноменологическом описании их ориентационный порядок характеризуется симметричным тензором второго ранга  $Q_{ij}$  с нулевым следом [1], а в статистической теории для этой цели используется плотность квадрупольного момента распределения массы молекул (см. [2]). Корреляционные функции ориентационного порядка рассматривались ранее на феноменологическом уровне (см. [3] и цитированную там литературу) и для однородных нематиков на основе статистического подхода [4].

Ниже излагается статистическая теория ориентационных флуктуаций в неоднородных нематиках и ее применение к расчету модулей ориентационной упругости рассматриваемых сред. Работа является развернутым изложением тезисов доклада [5] и основана на работах [6, 7].

Как известно [10], вклад флуктуаций плотности  $\Delta\rho(\vec{x}, \Omega)$  в свободную энергию нематика может быть выражен через прямую корреляционную функцию  $c(\vec{x} - \vec{x}', \Omega, \Omega')$  (предполагается, что  $c$  от  $\rho$  не зависит):

$$\Delta F = -(2\beta)^{-1} \iint c(\vec{x} - \vec{x}', \Omega, \Omega') \Delta\rho(\vec{x}, \Omega) \Delta\rho(\vec{x}', \Omega') d\vec{x} d\vec{x}' d\Omega d\Omega', \quad (1)$$