

Если хотя бы один из показателей k , m_1 , m_2 материала меньше единицы, напряжения по мере приближения к центру диска возрастают, т. е. около полюса анизотропии будет иметь место концентрация напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. — М., 1957. — 463 с. 2. Нодге Р.Г., Бруклин Н.У. Stress Functions for Rotating Plates // J. of Appl. Mech. — 1956. — Vol. 23, №2. — P. 273–275. 3. Shiratori E., Ikegami K., Ishill T. Study on the High Speed Rotating Disc Reinforced by Laminating and Hoop Winding Method // Bull. ISME. — 1981. — Vol. 24, №189. — P. 501–506.

УДК 539.3:518.6

В.С. РОМАНЧИК, канд. физ.-мат. наук,
НГУЕН ТИЕН КХИЕМ (БГУ)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается применение метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) в решении задачи колебания упругих пластин при случайных нагрузках.

Пусть пластина находится под действием нормальных нагрузок с интенсивностью $q(r, t)$ и таких нагрузок в ее срединной плоскости, что внутренние усилия T_1 , T_2 постоянны и равны p . Тогда уравнение поперечных колебаний пластины можно записать так:

$$D\Delta^2 W(r, t) + p\Delta W(r, t) + \rho h \frac{\partial^2 W(r, t)}{\partial t^2} = q(r, t), \quad (1)$$

где $W(r, t)$ — поле прогибов; $r = (x, y) \in S$; S — область на плоскости, занимаемая пластиной; D , h , ρ — соответственно цилиндрическая жесткость, толщина пластины и плотность материала.

Рассмотрим случай, когда q — стационарный временно-пространственный случайный процесс [1]. Согласно теории таких случайных процессов,

$$q(r, t) = q_0(r) + \int_{-\infty}^{\infty} Q(r, \omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где $q_0(r) = \langle q(r, t) \rangle$ — математическое ожидание; Q — случайное поле, обладающее свойством стохастической ортогональности:

$$\langle Q^*(r, \omega) Q(r', \omega') \rangle = S_q(r, r', \omega) \delta(\omega - \omega').$$

Знак $\langle \cdot \rangle$ обозначает оператор усреднения по вероятности, $*$ — комплексную сопряженность. Тензор S_q называется спектром пространственной корреляции случайного поля $q(r, t)$.

В рассматриваемом случае корреляционная функция находится по формуле

$$K_q(r, r', \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(r, r', \omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Предположим, что разложение поля Q

$$Q(r, \omega) = A(\omega)g(r, \omega),$$

где $g(r, \omega)$ – детерминированное поле; $A(\omega)$ – такая случайная функция от ω , что $\langle A^*(\omega)A(\omega') \rangle = S\delta(\omega - \omega')$.

Тогда

$$S_q(r, r', \omega) = S_0(\omega)g^*(r, \omega)g(r', \omega).$$

Будем рассматривать стационарные колебания пластины, представляя поле прогибов в виде

$$W(r, t) = W_0(r) + \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\Phi(r, \omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad (2)$$

где $W_0(r)$ – математическое ожидание поля прогибов; $\Phi(r, \omega)$ – неслучайное поле.

Спектр пространственной корреляции и корреляционная функция поля W в этом случае имеют вид:

$$S_W(r, r', \omega) = S_0(\omega)\Phi^*(r, \omega)\Phi(r', \omega), \quad (3)$$

$$K_W(r, r', \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega)\Phi^*(r, \omega)\Phi(r', \omega)e^{i\omega\tau}d\omega. \quad (4)$$

Таким образом, задача определения поля W , т. е. его вероятностных характеристик W_0 , K_W , S_W , сводится к нахождению двух полей W_0 , Φ при заданных q_0 , g .

Подставив выражение (2) в (1), получим уравнения для определения искомого W_0 , Φ :

$$\Delta^2 W_0(r) - 2\lambda\Delta W_0(r) = q_0(r)/D, \quad (5)$$

$$\Delta^2 \Phi(r, \omega) - 2\lambda\Phi(r, \omega) - \omega_0^2\Phi(r, \omega) = f(r, \omega), \quad (6)$$

где $2\lambda = -p/D$; $\omega_0^2 = \rho h\omega^2/D$; $f = g/D$.

Уравнения (5) и (6) можно записать в виде

$$(\Delta^2 - 2\lambda\Delta - \omega_0^2)\Phi = f. \quad (7)$$

Уравнению (5) соответствует значение $\omega_0 = 0$. Итак, задача состоит в решении уравнения (7).

Введем обозначения $k_1^2 = \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} - \lambda$, $k_2^2 = \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} + \lambda$ и перепишем уравнение (7):

$$(\Delta + k_1^2)(\Delta - k_2^2)\Phi = (\Delta - k_2^2)(\Delta + k_1^2)\Phi = f.$$

Положив сначала $u = (\Delta - k_2^2)\Phi$, получим уравнение относительно u :

$$(\Delta + k_1^2)u = f.$$

Теперь с помощью формулы Грина можно доказать следующее интегральное представление функции u :

$$u(r) = \int_L \left[\frac{\partial G_+(r, \xi)}{\partial n} u(\xi) - G_+(r, \xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} \right] dl + \int_S G_+(r, r') f(r') ds, \quad (8)$$

где $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали к контуру L ; $r, r' \in S$, $\xi \in L$, $G_+ = 1/4 \cdot J_0(k_1|r-\xi|)$ — функция Макдональда, являющаяся фундаментальным решением уравнения $(\Delta + k_1^2)G = 0$.

Аналогично, положив $v = (\Delta - k_2^2)\Phi$, получим

$$v(r) = \int_L \left[\frac{\partial G_-(r, \xi)}{\partial n} v(\xi) - G_-(r, \xi) \frac{\partial v(\xi)}{\partial n} \right] dl + \int_S G_-(r, r') f(r') ds, \quad (9)$$

где $G_- = -1/(2\pi) \cdot K_0(k_2|r-\xi|)$ — фундаментальное решение уравнения $(\Delta - k_2^2)G = 0$.

Из (8) и (9) с учетом выражений функций u, v после простых преобразований будем иметь соотношения:

$$(k_1^2 + k_2^2)\Delta\Phi(r) = \int_L \left[\frac{\partial G_1(r, \xi)}{\partial n} \Delta\Phi(\xi) + \frac{k_1^2 k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} \frac{\partial G_{12}(r, \xi)}{\partial n} \Phi(\xi) - G_1(r, \xi) \frac{\partial \Delta\Phi(\xi)}{\partial n} - \frac{k_1^2 k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} G_{12}(r, \xi) \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial n} \right] dl + \int_S G_1(r, r') f(r') ds, \quad (10)$$

$$(k_1^2 + k_2^2)\Phi(r) = \int_L \left[\frac{\partial G_{12}(r, \xi)}{\partial n} \frac{\Delta\Phi(\xi)}{k_2^2 - k_1^2} + \frac{\partial G_2(r, \xi)}{\partial n} \Phi(\xi) - G_2(r, \xi) \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial n} \right] dl + \int_S \frac{G_{12}(r, r')}{k_2^2 - k_1^2} f(r') ds. \quad (11)$$

В формулах (10) и (11) введены обозначения: $G_1 = k_1^2 G_+ + k_2^2 G_-$, $G_2 = k_2^2 G_+ + k_1^2 G_-$, $G_{12} = G_1 - G_2$.

При r , стремящемся к границе, в силу слабой особенности функций Бесселя G_+, G_- для гладкой границы получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2) \Delta \Phi(\xi) &= \int_L \left\{ \frac{\partial G_1(\eta, \xi)}{\partial n} \Delta \Phi(\xi) + \right. \\
 &+ \frac{k_1^2 k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} \frac{\partial G_{12}(\eta, \xi)}{\partial n} \Phi(\xi) - G_1(\eta, \xi) \frac{\partial \Delta \Phi(\xi)}{\partial n} - \\
 &- \left. \frac{k_1^2 k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} G_{12}(\eta, \xi) \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial n} \right\} dl + \int_S G_1(\eta, r') f(r') dS, \\
 \\
 \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2) \Phi(\eta) &= \int_L \left\{ \frac{\partial G_{12}(\eta, \xi)}{\partial n} \frac{\Delta \Phi(\xi)}{k_2^2 - k_1^2} + \right. \\
 &+ \frac{\partial G_2(\eta, \xi)}{\partial n} \Phi(\xi) - \frac{G_{12}(\eta, \xi)}{k_2^2 - k_1^2} \frac{\partial \Delta \Phi(\xi)}{\partial n} - \\
 &- \left. G_2 \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial n} \right\} dl + \int_S \frac{G_{12}(\eta, r')}{k_2^2 - k_1^2} f(r') dS.
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Соотношения (12) представляют систему ГИУ для задачи колебаний пластин. В зависимости от граничных условий, в которых обычно известны две из четырех граничных функций $\Phi(\xi)$, $\partial \Phi(\xi)/\partial n$, $\Delta \Phi(\xi)$, $\partial \Delta \Phi(\xi)/\partial n$, система (12) позволяет определить остальные два неизвестных. После решения полученной системы ГИУ, подставив значения граничных функций в (10), (11), получим решение уравнения (7) в произвольной точке области S . В простых случаях граничных условий система (12) получает вид:

Для пластин с закрепленным краем

$$\begin{aligned}
 &\int_L \left\{ G_1(\eta, \xi) \frac{\partial \Delta \Phi(\xi)}{\partial n} - \Delta \Phi(\xi) \frac{\partial G_1(\eta, \xi)}{\partial n} \right\} dl + \\
 &+ \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} \Delta \Phi(\eta) = \int_S G_1(\eta, r') f(r') dS, \\
 \\
 &\int_L \left\{ G_{12}(\eta, \xi) \frac{\partial \Delta \Phi(\xi)}{\partial n} - \Delta \Phi(\xi) \frac{\partial G_{12}(\eta, \xi)}{\partial n} \right\} dl = \int_S G_{12}(\eta, r') f(r') dS;
 \end{aligned}$$

В случае шарнирного опирания пластины

$$\left. \begin{aligned}
 &\int_L \left\{ G_1(\eta, \xi) \frac{\partial \Delta \Phi(\xi)}{\partial n} + \frac{1}{2\lambda} G_{12}(\eta, \xi) \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial n} \right\} dl = \\
 &= \int_S G_1(\eta, r') f(r') dS,
 \end{aligned} \right\}$$

$$\int_L \left\{ \frac{1}{2\lambda} G_{12}(\eta, \xi) \frac{\partial \Delta \Phi(\xi)}{\partial n} + \omega_0^2 G_2(\eta, \xi) \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial n} \right\} dl = \dots$$

$$= \int_S \frac{G_{12}(\eta, r')}{2\lambda} f(r') dS.$$

Решение системы уравнений (12) зависит от значений λ, ω_0^2 . При определенном, отличном от нуля значении λ каждому значению частоты ω_0 соответствует одно решение $\{\Phi(r), \Delta \Phi(r)\}$. Для нахождения спектра пространственной корреляции полученное решение подставляется в (3). Корреляционная функция находится интегрированием по частоте в диапазоне действующих частот согласно (4).

Система ГИУ (12) в достаточно общем виде описывает граничные условия и конфигурацию пластин. Из нее можно получать системы ГИУ для неоднородных граничных условий или многосвязных областей.

Для иллюстрации рассмотрим численное решение системы уравнений (13) в случае шарнирно опертой квадратной пластины. Алгоритм решения состоит в следующем. Граница разбивается на N отрезков, в центре каждого из которых неизвестные функции считаются постоянными. Тогда (13) заменяется системой алгебраических уравнений

$$[M] \{Z\} = \{B\}, \quad (14)$$

где

$$z_i = \frac{\partial \Delta \Phi(\eta_i)}{\partial n}, \quad z_{i+N} = \frac{\partial \Phi(\eta_i)}{\partial n}, \quad i = \overline{1, N};$$

$$m_{i,j} = \int_{L_j} G_j(\eta_i, \xi) dl, \quad m_{i,j+N} = m_{i+N,j} = \frac{1}{2\lambda} \int_{L_j} G_{12}(\eta_i, \xi) dl;$$

$$m_{i+N,j+N} = \omega_0^2 \int_L G_2(\eta_i, \xi) dl, \quad b_i = \int_S G_1(\eta_i, r') f(r') dS;$$

$$b_{i+N} = \frac{1}{2\lambda} \int_S G_{12}(\eta_i, r') f(r') dS, \quad L = \cup_j L_j, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Для коэффициентов m_{ij} при $i \neq j$ интегралы вычисляются по формуле Симпсона, при $i = j$, в силу сингулярного характера подынтегральных функций, используется приближенная формула

$$\int_{-x}^x \frac{\pi}{2} J_0(|x|) dx = 2x \left[\frac{\pi}{2} J_0(x) + 1 \right].$$

Для вычисления компонент вектора B разобьем область на две части S_ϵ и S_1 . В S_1 , не имеющей особенностей, интегралы вычисляются по формуле Симпсона, в приграничной полосе S_ϵ — аналогично контурным интегралам.

Решение системы (14) методом Гаусса реализовано по программе на ЭВМ СМ-4. На рис. 1 изображена схема дискретизации области, для которой решается задача, на рис. 2 — значения $\partial \Phi(\xi)/\partial n$ и $\partial \Delta \Phi(\xi)/\partial n$ в узлах границы области при $N = 20$.

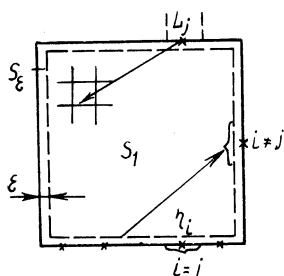


Рис. 1. Схема дискретизации области и ее границы

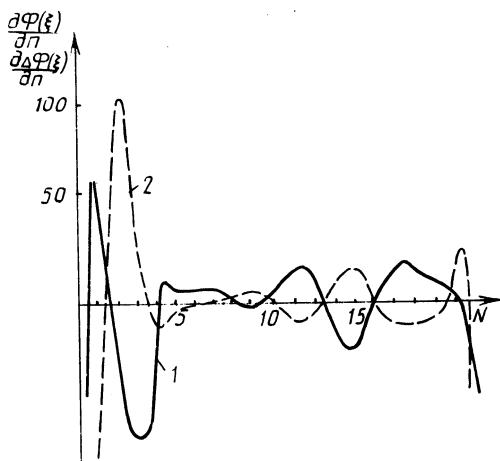


Рис. 2. Значения $\partial\Phi(\xi)/\partial n$ и $\partial\Delta\Phi(\xi)/\partial n$ в узлах границы области:

1 — $\partial\Phi(\xi)/\partial n$; 2 — $\partial\Delta\Phi(\xi)/\partial n$

Проведенное исследование показывает эффективность метода граничных интегральных уравнений в задачах о случайных колебаниях пластин. Преимуществом указанного метода перед другими является то, что он позволяет решать задачи для тел сложной конфигурации при различных граничных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б о л о т и н В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. — М., 1982. — 531 с.
2. Метод граничных интегральных уравнений / Под ред. Т. Круза, Ф. Риццо. — М., 1978. — 210 с.
3. К р ы л о в В.И., Б о б к о в В.В., М о н а с т ы р н ы й П.И. Вычислительные методы. — М., 1976. — Т. 1. — 302 с.

УДК 539.3

М.Д. МАРТЫНЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
НГО ХЫОНГ НЬЮ, С.В. МОРОЗ (БГУ)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ БЕЗМОМЕНТНОЙ ФОРМЫ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ДЕЙСТВИИ ЗАДАННОЙ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Определение формы меридиана оболочки вращения является одной из обратных задач теории безмоментных оболочек. Для изотропного материала эта задача ранее была рассмотрена в [1, 2], а один конкретный случай [1] был впоследствии исследован другим методом в [3].

Ниже показывается применение метода малого параметра к решению задачи об определении формы меридиана оболочки вращения, выполненной из